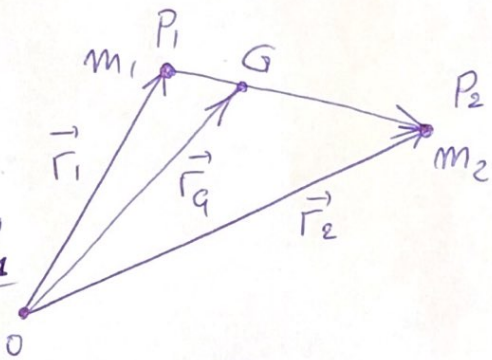
Centro di massa (baricentro)

Abbiamo ricavato l'eq. del moto per un sistema di particelle ($n \geq 1$) detta IEC. Esiste una formulaz. equivalente che abbia la stessa forma della tradizionale eq. del moto

$n = 1$	$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$	$m\vec{a} = \vec{F}$
$n > 1$	$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{(E)}$	?

$n = 2$



$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1 \overrightarrow{OP_1} + m_2 \overrightarrow{OP_2}}{m_1 + m_2} =$$

$$= \frac{m_1 \overrightarrow{OP_1} + m_2 \overrightarrow{OP_1} + m_2 \overrightarrow{OP_2} - m_2 \overrightarrow{OP_1}}{m_1 + m_2}$$

$$= \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2} \overrightarrow{OP_1} + \frac{m_2 (\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1})}{m_1 + m_2} = \overrightarrow{OP_1} + \underbrace{\frac{m_2}{m_1 + m_2}}_{\in (0,1)} \overrightarrow{P_1P_2}$$

Il CM è posizionato sul segmento $\overrightarrow{P_1P_2}$ in prossimità del corpo più massivo indip. dalla posizione di O.

$$\boxed{\vec{r}_G = \vec{r}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}$$

Oss

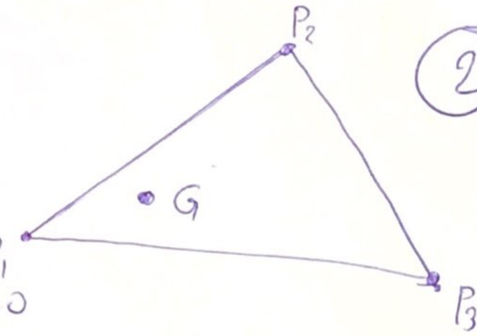
$m_1 \ll m_2 \Rightarrow \vec{r}_G \simeq \vec{r}_2$

$m_1 \gg m_2 \Rightarrow \vec{r}_G \simeq \vec{r}_1$

$m_1 = m_2 \Rightarrow G$ punto medio $\overrightarrow{P_1P_2}$

$n = 3$

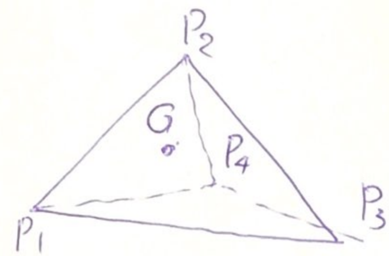
$$\vec{r}_G = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$



Si può dim. che G è interno al triangolo con vertici P_1, P_2, P_3

$n = 4$

$$\vec{r}_G = \frac{\sum_{J=1}^{4} m_J \vec{r}_J}{\sum_{J=1}^{4} m_J}$$



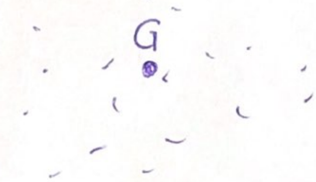
G è interno al tetraedro con vertici P_1, P_2, P_3, P_4

n qualsiasi

$$\boxed{\vec{r}_G = \frac{\sum_{J=1}^{n} m_J \vec{r}_J}{m}}$$

m = massa totale $= \sum_{J=1}^{n} m_J$

G è interno al più grande poliedro costruito con i punti P_J, intuitivamente entro la "nuvola" di particelle



Oss

Il CM è un punto dello spazio dove non è necessariamente posizionata della massa

Teorema del centro di massa

$$\boxed{m\vec{a}_G = \vec{F}^{(E)}}$$

$\vec{F}^{(E)}$ → somma tutte le forze esterne

$\vec{a}_G$ → acc. centro di massa

m → massa totale

Dim

$$\vec{r}_G = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{n} m_j \vec{r}_j \qquad \vec{v}_G = \frac{d\vec{r}_G}{dt} = \frac{1}{m} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \underbrace{m_j \vec{v}_j}_{\vec{p}_j}}_{\vec{p}}$$

$$\boxed{\vec{v}_G = \frac{\vec{p}}{m}}$$

dalla I EC $\quad \vec{F}^{(E)} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} m\vec{v}_G = m\vec{a}_G$

Oss 1

Il moto del CM dipende dalle sole forze esterne. Poiché la "nuvola" di particelle segue il CM, significa che il teorema del CM consente di determinare il moto d'insieme del sistema di PM.

Oss 2

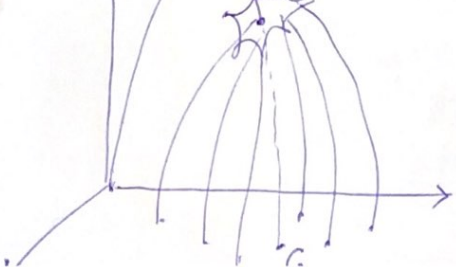
Se il sistema di particelle è isolato $\vec{F}^{(E)} = 0 \Rightarrow$

$\vec{v}_G =$ costante $\Rightarrow$ G si muove di MRU

Oss 3

Il teorema del CM non identifica il moto di ciascuna particella ma solo il moto d'insieme (come la IEC).

Es



La dinamica della singola particella è determinata considerando anche le forze interne.

Problema dei due corpi

Ricavare la legge oraria per ciascuno dei due punti mat. isolati e interagenti

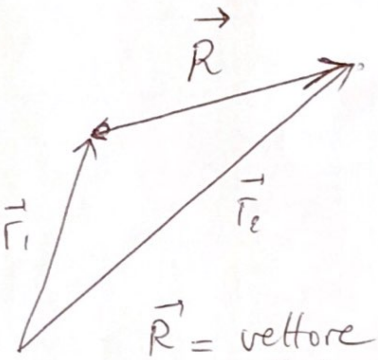
$$\vec{F}_{12} = m_1 \vec{a}_1$$
$$\vec{F}_{21} = m_2 \vec{a}_2$$

anziché sommare eseguo la sottrazione

$$\frac{\vec{F}_{21}}{m_2} - \frac{\vec{F}_{12}}{m_1} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1 = \vec{a}_R =$$ accelerazione relativa del corpo 2 visto da 1

$$\vec{a}_R = \vec{a}_2 - \vec{a}_1 = \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} - \frac{d\vec{r}_1}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\underbrace{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}_{\vec{R}}$$

$$\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \vec{F}_{21}\underbrace{\left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1}\right)}_{1/\mu}$$



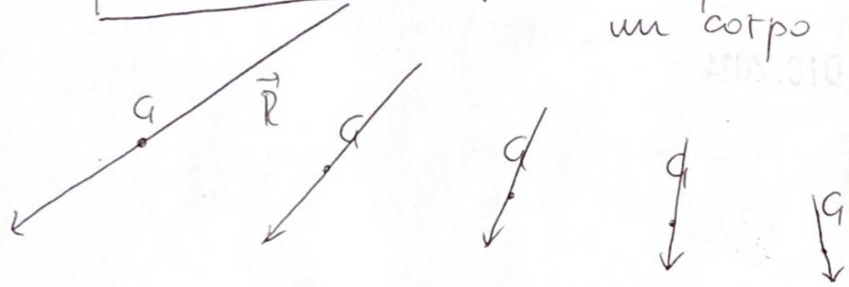
$\vec{R}$ = vettore posiz. di "2" rispetto a "1"

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} < m_1, m_2$$

massa ridotta

$$\boxed{\mu \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \vec{F}_{21}}$$

Oss
Il problema dei due corpi è equivalente a quello di un corpo singolo



$\vec{v}_G$ = costante

$$\left.\begin{aligned} \vec{R}(t) &= \vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t) \\ \vec{r}_G(t) &= \frac{m_2\vec{r}_2(t) + m_1\vec{r}_1(t)}{m_1 + m_2} = \vec{r}_G(0) + \vec{v}_G\, t \end{aligned}\right\}$$ ricavo $\vec{r}_1(t)$, $\vec{r}_2(t)$

Oss per $n \geq 3$ tale compito non è più possibile