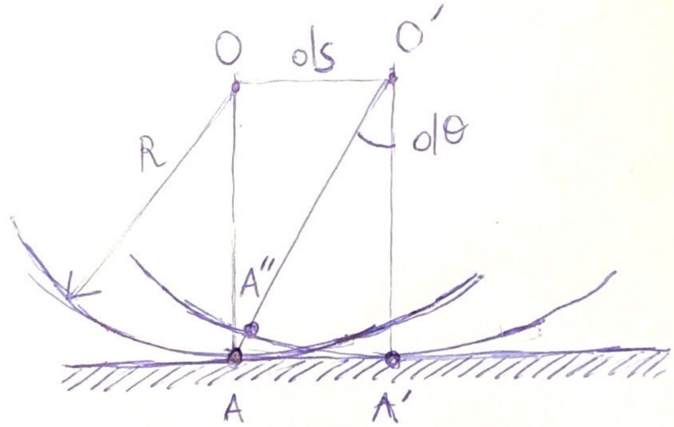
Vincolo di rotolamento senza strisciamento

Si verifica quando un corpo rigido con simmetria rotazionale (sfera, cilindro, cono, ...) rotola su una superficie rigida in modo tale che la velocità relativa nei punti di contatto fra i corpi rigidi sia nulla.

Oss

È la normale condizione di rotolamento delle ruote di un veicolo sulla strada o di un sistema di ingranaggi.

Es cilindro che rotola senza strisciare su un piano



L'asse del cilindro O si sposta in O' dopo un intervallo di tempo infinitesimo dt; corrispondentemente la generatrice a contatto sul piano (istantaneamente in quiete) si sposta della stessa quantità ds:

$$|\overrightarrow{OO'}| = |\overrightarrow{AA'}| = ds$$

Supponiamo di mettere un marcatore nella posizione A e di osservarne la posizione dopo dt, esso si sposta in A'' e non sarà più istantaneamente

in quiete, poiché a quell'istante lo sarà A'.
A meno di infinitesimi di ordine superiore vale

$$\underbrace{|\widehat{A'A''}|}_{\text{arco } = R\,d\theta} = |\overrightarrow{AA''}|$$

Pertanto:

$$ds = |\overrightarrow{OO'}| = |\overrightarrow{AA''}| = |\widehat{A'A''}| = R\,d\theta$$

dividiamo per dt

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = R\,\frac{d\theta}{dt} = R\,\omega(t) \qquad \boxed{v(t) = R\omega(t)}$$

$v(t)$: velocità istantanea di traslazione dell'asse di rotazione

$\omega(t)$: velocità istantanea angolare di rotazione attorno all'asse di rotazione

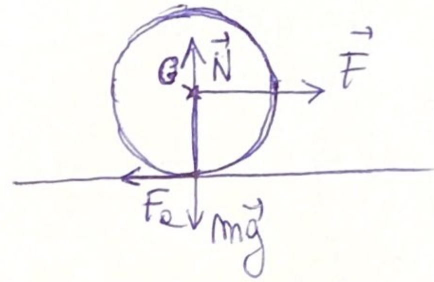
Oss

In generale la velocità di traslazione dell'asse del cilindro è indipendente da quella di rotazione attorno al proprio asse. Il vincolo di rotolamento senza strisciamento impone un legame fra i due moti; per esempio se la velocità di traslazione è nulla anche la velocità di rotolamento sarà nulla.

Es1

Cilindro rigido che ruota senza strisciare su un piano orizzontale rigido, trascinato da una forza costante

Poiché si ha rotolamento senza strisciamento deve essere presente l'attrito altrimenti si avrebbe pura traslazione.



Ovviamente si deve trattare di attrito statico altrimenti si avrebbe strisciamento.

$$\begin{cases} N - mg = 0 \\ F - F_a = m a_G \end{cases} \Big\} \text{ teor. CM} \qquad I = \frac{1}{2} m R^2$$

$$F_a R = \frac{dL_G}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} = I\alpha \quad \Big\} \text{ II eq. card. rispetto al polo } G$$

$$v_G = R\omega \quad \Big\} \text{ vincolo rot. senza strisciam.} \Rightarrow a_G = R\alpha$$

$$\begin{cases} N = mg \\ F - F_a = m a_G \\ F_a \cancel{R} = \frac{1}{2} m R^{\cancel{2}} \alpha \\ a_G = R\alpha \end{cases} \qquad F_a = \frac{1}{2} m R\alpha = \frac{1}{2} m a_G \qquad F = F_a + m a_G = \frac{3}{2} m a_G$$

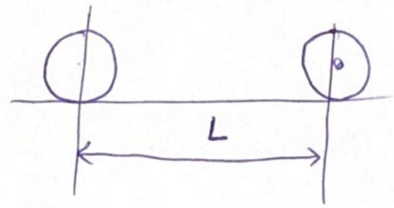
$$a_G = \frac{2}{3}\frac{F}{m} \qquad F_a = \frac{F}{3} \qquad \alpha = \frac{2}{3}\frac{F}{m}\frac{1}{R}$$

Oss

Il moto traslazionale del cilindro è rallentato rispetto al caso puramente traslazionale $a_G = \frac{F}{m}$

Da un'analisi energetica risulta che:

- lavoro di $\vec{F}$ = FL $\qquad$ L = distanza percorsa



- lavoro forze che producono traslazione $= (F - F_a)L = \boxed{\frac{2}{3}FL}$

- lavoro forze che producono rotazione $= \int_0^{\Delta\theta} M_z\, d\theta = \int_0^{\Delta\theta} F_a R\, d\theta = F_a \underbrace{R\Delta\theta}_{L} = \boxed{\frac{FL}{3}}$

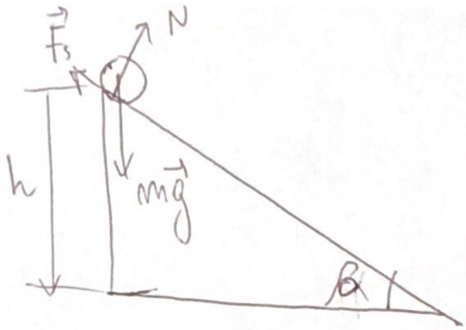
- energia cinetica traslazionale

$$\frac{1}{2} m v_a^2 = \frac{1}{\cancel{2}} m \cancel{2} a_a L = m \frac{2}{3}\frac{F}{m} L = \boxed{\frac{2}{3} FL}$$

- energia cinetica rotazionale

$$\frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{\cancel{2}} m R^2 \cancel{2} \underset{\downarrow}{\alpha}\, \underset{\downarrow}{\Delta\theta} = \frac{1}{2} m \underset{\downarrow}{a_a} L = \boxed{\frac{1}{3} FL}$$

$$a_a/R \quad L/R \qquad\qquad \tfrac{2}{3}F/m$$



$$F_s R = \frac{1}{2} m \cancel{R^2} \frac{a_G}{\cancel{R}} \qquad F_s = \frac{1}{2} m a_G$$

$$\cancel{m} g \sin\beta - \frac{1}{2} \cancel{m} a_G = \cancel{m} a_G$$

$$\begin{cases} mg \sin\beta - F_s = m a_G \\ N - mg\cos\beta = 0 \\ F_s R = I\alpha = \frac{1}{2} m R^2 \alpha \\ a_G = R\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} a_G = \frac{2}{3} g \sin\beta \implies v_G^2 = \frac{4gh}{3} \\ F_s = \frac{mg}{3} \sin\beta \\ N = mg\cos\beta \\ \alpha = \frac{2}{3} \frac{g}{R} \sin\beta \end{cases}$$

Applico l'approccio con l'en. meccanica

$$\frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = mgh \qquad I = \frac{1}{2} m R^2 \quad \omega = \frac{v_G}{R}$$

$$\frac{1}{2} \cancel{m} v_G^2 + \frac{1}{4} \cancel{m} \cancel{R^2} \frac{v_G^2}{\cancel{R^2}} = \cancel{m} g h$$

$$\frac{3}{4} v_G^2 = gh \qquad v_G^2 = \frac{4gh}{3} < 2gh$$ se non ci fosse attrito

Lavoro della forza di attrito

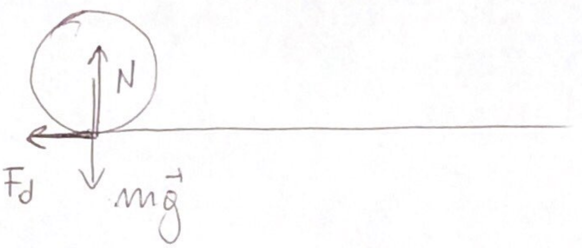
$$\mathcal{L}_{Fa} = \int_0^\theta M_z(\theta)\, d\theta = F_s R \frac{h}{\sin\beta} \frac{1}{R} = \frac{mgh}{3} =$$

$$\frac{I}{2} \omega^2 = \frac{1}{4} m R^2 \omega^2 = \frac{1}{4} m v_G^2 = \frac{mgh}{3} =$$

$$mgh \xrightarrow{F_s} \frac{mgh}{3}$$ en. cin rot

$$mgh \xrightarrow{mg\sin\beta - F_s} \frac{2}{3} mgh$$ en. cin traslaz.

Es3



$$I = \frac{2}{5} m R^2$$

$$\begin{cases} m a_G = -F_d = -mg\mu_d \\ 0 = mg - N \\ M_z = I\alpha = F_d R \end{cases}$$

$a_G = -\mu_d g$ moto trasl. decelerato

$$\alpha = \frac{F_d R}{I} = \frac{\mu_d \cancel{m}g \cancel{R}}{\frac{2}{5}\cancel{m} R^{\cancel{2}}} =$$

$\alpha = \frac{5\mu_d g}{2R}$ moto rotat. accelerato

questo moto continua
finché non si raggiunge la
condiz. di rotol. senza strisc.
cioè finché ~~$a_G = R\alpha$~~ $v_G = R\omega$

$$v_G(t) = v_0 - \mu_d g t$$
$$\omega(t) = \frac{5\mu_d g}{2R} t$$
$$\Rightarrow \quad v_0 - \mu_d g \tau = \frac{5\mu_d g \tau}{\cancel{2R}}$$

$$\tau = \frac{2v_0}{7\mu_d g}$$

$$\omega(\tau) = \frac{5}{2}\frac{\mu_d g}{R}\tau = \frac{5}{\cancel{2}}\frac{\cancel{\mu_d g}}{R}\frac{\cancel{2}v_0}{7\cancel{\mu_d g}} = \frac{5}{7}\frac{v_0}{R}$$

$$v_G(\tau) = \frac{5}{7} v_0$$

$v'(t)$ = vel di un punto sulla circonferenza rispetto a G