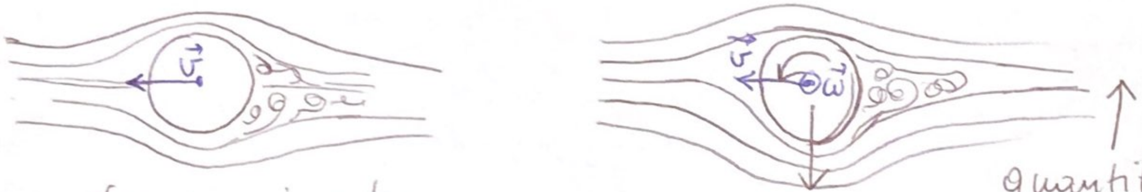
Oss

se il CR si muove in aria la traiettoria non è più parabolica a causa dell'*effetto Magnus*



Questo spiega "l'effetto" a calcio il top-spin a tennis, ecc.

Nel seguito supporremo di avere rotazione attorno ad un asse fisso di rotazione

Momento d'inerzia

- per la singola particella su un moto piano e circolare

$\vec{L}_0 = mr^2\vec{\omega}$ $\quad \dfrac{d\vec{L}_0}{dt} = (mr^2)\vec{\alpha} = \vec{M}_0 \rightarrow$ causa del moto rotazionale

$\vec{\alpha} \rightarrow$ descriz. del moto rotazionale

mr^2: per analogia con $\vec{F} = m\vec{a}$

$I = mr^2$ è detto momento d'inerzia ed esprime l'inerzia per rotazioni attorno al punto O

- Se ho un insieme di particelle complanari

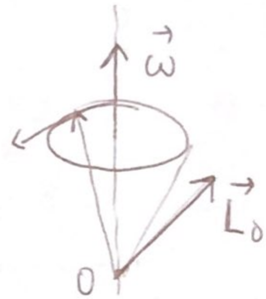
$$\vec{L}_0 = \sum_{J=1}^{n} \vec{L}_{0_J} = \sum_{J=1}^{n} m_J r_J^2 \vec{\omega}$$

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \underbrace{\left(\sum_{J=1}^{n} m_J r_J^2\right)}_{I\,=\,\text{momento d'inerzia}} \vec{\alpha}$$

$$[I] = [L]^2[T]^0[M]^1 = [kg\,m^2]$$

Momento angolare assiale

- considero una particella in moto circolare



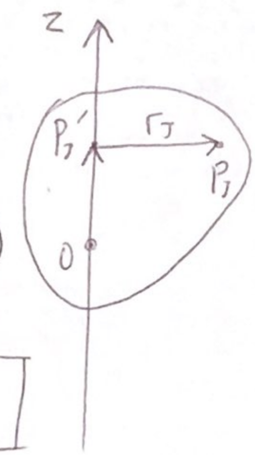
Se il polo O non è complanare alla circonferenza, il mom. ang. ruota attorno all'asse di rotazione.
Ai fini dello studio della rotazione attorno all'asse, solamente la componente assiale è interessante.
Peraltro se vario il polo in O' lungo l'asse tale componente rimane costante ed è detta <u>componente assiale</u> del momento angolare

- per un CR vale un ragionamento analogo per il mom. angolare totale

$$\vec{L}_0 = \sum_{J=1}^{n} m_J \vec{OP_J} \times \vec{v}_J = \sum_{J=1}^{n} m_J (\vec{OP_J'} + \vec{P_J'P_J}) \times \vec{v}_J =$$

$$= \underbrace{\sum_{J=1}^{n} m_J \vec{OP_J'} \times \vec{v}_J}_{\text{componente planare}} + \underbrace{\sum_{J=1}^{n} m_J \vec{P_J'P_J} \times \vec{v}_J}_{\text{componente assiale}}$$

(indipendente da O purché sia lungo l'asse)



$$L_{0z} = \sum_{J=1}^{n} m_J r_J v_J =$$

$$= \left(\sum_{J=1}^{n} m_J r_J^2\right) \omega = I\omega \qquad \boxed{L_z = I\omega}$$

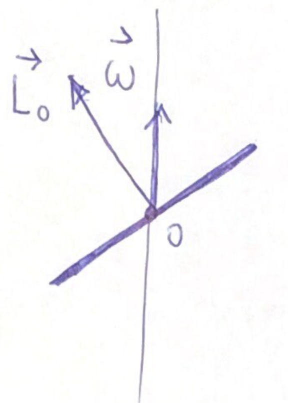
Energia cinetica

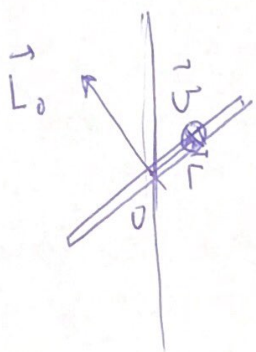
$$E_c = \frac{1}{2} \sum_{J=1}^{n} m_J v_J^2 = \sum_{J=1}^{n} \frac{1}{2} m_J r_J^2 \omega^2 = \boxed{\frac{1}{2} I \omega^2 = E_c}$$

Oss

Il fatto che la componente assiale del mom. ang. sia prop. a ω, ossia $L_z = I\omega$ non implica che $\vec{L}$ sia parallelo a $\vec{\omega}$. Tuttavia per qualsiasi corpo rigido esistono sempre tre direzioni perpendicolari fra di loro tali che $\vec{L}$ e $\vec{\omega}$ sono paralleli. Se un corpo possiede un asse di simmetria allora questo è di questo tipo, detto asse principale d'inerzia.

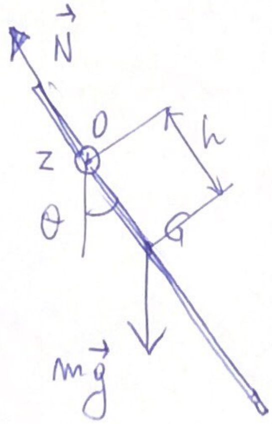
Es





La relazione $L_z = I\omega$ consente di determinare l'evoluz. temporale di qualsiesi corpo rigido ruotante attorno ad un asse fisso.

Es



$$\frac{dL_{z_0}}{dt} = M_{z_0}^{(E)} \qquad L_{z_0} = I\omega$$

si può omettere

$$M_z^{(E)} = \frac{d}{dt} I\omega = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha$$

$$\boxed{M_z^{(E)} = I\alpha}$$

$$M_z^{(E)} = \boxed{-mgh\sin\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}}$$

per piccole oscillazioni $\sin\theta \sim \theta$ si ottiene l'eq del moto armonico

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgh\,\theta \qquad \omega^2 = \frac{mgh}{I} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Oss
Se il CR è un P.
mgh I = mh²

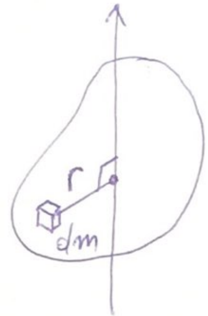
Corpo rigido continuo

Sinora abbiamo considerato sistemi di un numero finito o numerabile di particelle e le quantità complessive erano somme del tipo $\sum_{J=1}^{n}$. Se il sistema è invece modellizzabile come un continuo, occorre modificare le espressioni ricavate mediante la densità di massa

$$\rho = \frac{dm}{dV} \qquad dm = \rho\, dV \qquad \rho = \rho(\vec{r}) = \rho(x,y,z)$$

Es 1

$$I = \sum_{J=1}^{n} r_J^2 m_J \rightarrow \int_V r^2\, dm = \int_V r^2 \rho\, dV$$



$$\boxed{I = \int_V r^2 \rho\, dV}$$

Es 2

$$m = \sum_{J=1}^{n} m_J \Rightarrow \int_V dm = \int_V \rho\, dV \qquad \boxed{m = \int_V \rho\, dV}$$

Es 3

$$\vec{r}_G = \frac{1}{m}\sum_{J=1}^{n} m_J \vec{r}_J \longmapsto \frac{1}{m}\int_V \vec{r}\, dm = \boxed{\frac{1}{m}\int_V \vec{r}\rho\, dV = \vec{r}_G}$$

che, in componenti

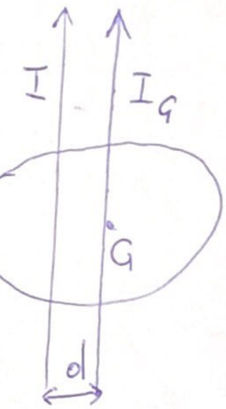
$$x_G = \frac{1}{m}\int_V x\rho\, dV, \quad y_G = \frac{1}{m}\int_V y\rho\, dV, \quad z_G = \frac{1}{m}\int z\rho\, dV$$

Es 4

$$\vec{L}_0 = \sum_{J=1}^{n} \vec{r}_J \times m_J \vec{v}_J \longrightarrow \boxed{\int_V \vec{r}\times\vec{v}\, dm = \vec{L}_0}$$

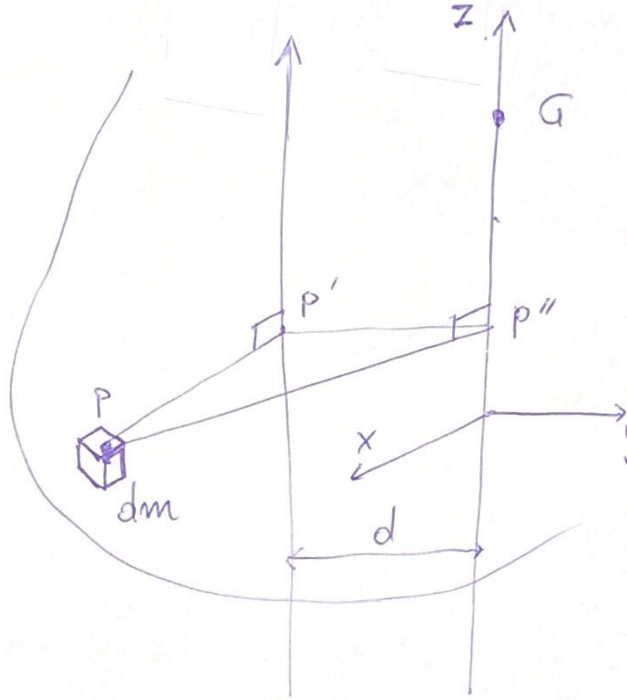
Teorema di Huygens - Steiner

Permette di calcolare un generico momento d'inerzia se si conosce il momento d'inerzia baricentrico nella stessa direzione



$$I = I_G + md^2$$

Dim



$$I = \int_V |PP'|^2 \, dm =$$

$$= \int_V |\overrightarrow{PP''} + \overrightarrow{P''P'}|^2 \, dm =$$

$$= \int_V |\overrightarrow{PP''}|^2 dm + \int_V |\overrightarrow{P''P'}|^2 dm +$$

$$+ 2 \int_V (\overrightarrow{PP''} \cdot \overrightarrow{P'P'}) \, dm =$$

- $\int_V |\overrightarrow{PP''}|^2 dm = I_G$
- $\int_V \underbrace{|\overrightarrow{P''P'}|^2}_{d^2} dm = d^2 \int_V dm = md^2$
- $\int_V (\overrightarrow{PP''}) \cdot \overrightarrow{P''P'} \, dm = \left(\int_V \overrightarrow{PP''} \, dm \right) \cdot \overrightarrow{P''P'}$

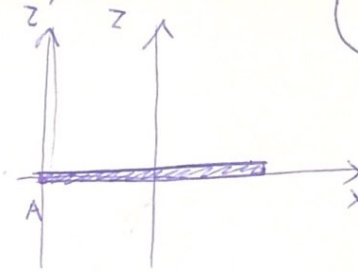
$\int_V (\overrightarrow{PP''})_z \, dm = 0$ poiché $\overrightarrow{PP''}$ giace sull'asse xy

$\int_V (\overrightarrow{PP''})_x \, dm = m \underbrace{x_G}_{0}$ $\quad \int_V (\overrightarrow{PP''})_y \, dm = m \underbrace{y_G}_{0}$

$$\boxed{I = I_G + md^2}$$

Oss
Il momento d'inerzia baricentrico è il più piccolo lungo una certa direz.

Calcolo di momenti d'inerzia



Es1 sbarra omogenea

$$I_G = \int_V x^2 \, dm = \int_{-L/2}^{+L/2} x^2 \lambda \, dx = \lambda \frac{2}{3} \frac{L^3}{2^3} = \frac{\lambda L^3}{12}$$

densità lineare di massa $\lambda = \frac{dm}{dx}$

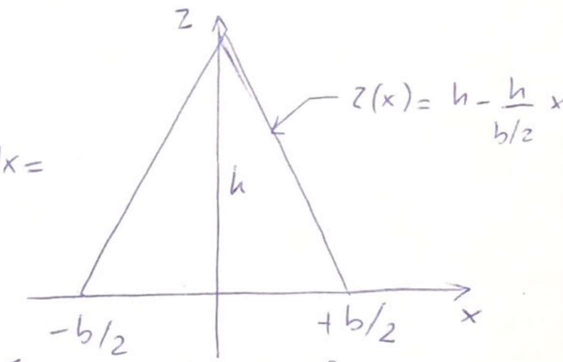
$$m = \lambda L \Rightarrow I_G = \frac{m L^2}{12}$$

Se mi riferisco al punto A

$$I_A = m\left(\frac{L}{2}\right)^2 + I_G = m\frac{L^2}{4} + \frac{m L^2}{12} = \frac{m L^2}{3}$$

(4 volte più inerte alle rotazioni!)

Es2 piastra triangolare

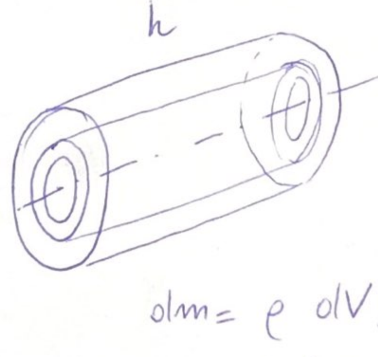


$$I_G = \int_V x^2 \, dm = 2\sigma \int_0^{b/2} x^2 \left(h - \frac{2h}{b} x\right) dx =$$

$$= 2\sigma \left(\int_0^{b/2} h x^2 \, dx - \frac{2h}{b} \int_0^{b/2} x^3 \, dx \right) =$$

$$= 2\sigma \left[h \frac{b^3}{3 \cdot 8} - \frac{2h}{b} \frac{b^4}{4 \cdot 16} \right] = 2 h b^3 \sigma \left[\frac{1}{24} - \frac{1}{32} \right] = \frac{h b^3}{4} \frac{\sigma}{12} = \frac{m b^2}{24}$$

Es3 cilindro omogeneo



$$I_G = \int_0^R r^2 \, dm = \int_0^R r^2 \rho \, 2\pi r h \, dr =$$

$$= 2\pi h \rho \int_0^R r^3 \, dr = 2\pi h \rho \frac{R^4}{4} =$$

$$= \pi h \rho \frac{R^4}{2} = \frac{1}{2} m R^2$$

$$dm = \rho \, dV = \rho \, 2\pi r \, dr \, h$$

Lavoro nel caso di rotazione solamente

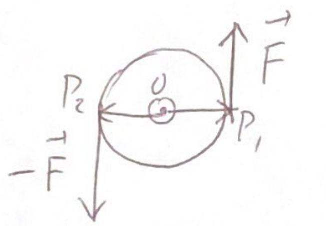
$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} M_z(\theta)\,d\theta = \int_{t_1}^{t_2} M_z(t)\,\frac{d\theta}{dt}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} I\,\frac{d\omega}{dt}\,\omega\,dt =$$

↳ comp. z delle somme dei momenti

$$= \frac{I}{2}\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\omega^2\,dt = \frac{I}{2}\omega^2(t_2) - \frac{I\,\omega^2(t_1)}{2} = \underbrace{E_c(t_2)-E_c(t_1)}_{\mathcal{L}(\theta_1\to\theta_2)}$$

$$\boxed{\mathcal{L}(\theta_1\to\theta_2) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M_z(\theta)\,d\theta}$$

Coppie di forze



Una coppia di forze non produce traslaz.

$$\vec{F}-\vec{F} = m\vec{a}_a = 0$$

ma solamente rotazione

$$\vec{M}_O^{(E)} = \vec{OP_1}\wedge\vec{F} + \vec{OP_2}\wedge -\vec{F} = 2\,\vec{OP_1}\wedge\vec{F}$$

$$|\vec{M}_O^{(E)}| = 2R\cdot|\vec{F}| = \text{diametro}\cdot\text{forza}$$

Poiché non è detto che le $\vec{F}$ vengano applicate sul bordo è meglio parlare sempre di momento

Potenza

$$d\mathcal{L} = M_z\,d\theta \qquad P = \frac{d\mathcal{L}}{dt} = M_z\cdot\omega$$