Dinamica di un sistema di particelle nel sistema di riferimento del centro di massa

La dinamica di un sistema di particelle è studiata rispetto ad un SRI mediante le eq. cardinali

$$\begin{cases} \vec{F}^{(E)} = \dfrac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}_G \\ \vec{M}^{(E)} = \dfrac{d\vec{L}_0}{dt} \end{cases}$$

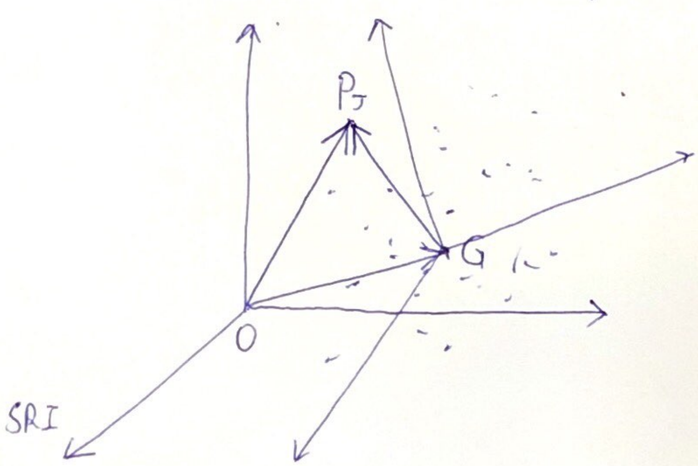
le quali forniscono informazioni sul moto d'insieme del sistema. In particolare la prima equazione risulta utile per lo studio delle traslazioni e la seconda per le rotazioni attorno al polo O.

Risulta utile lo studio del moto rispetto al SR del CM, ma occorre considerare che tale SR in generale non è inerziale e pertanto le eq. cardinali non sono applicabili direttamente.

Si sceglie un SR in moto puramente traslatorio con origine nel CM ed assi non ruotanti rispetto a quelli di un SRI.

$$\vec{OP}_J = \vec{OG} + \vec{GP}_J$$

$$\vec{OG} = \frac{1}{m}\sum_{J=1}^{n} m_J \vec{OP}_J$$



$\vec{v}_J$ = velocità rispetto al SRI $= \dfrac{d\vec{OP}_J}{dt}$

$\vec{U}_J$ = velocità rispetto al SR del CM $= \dfrac{d\vec{GP}_J}{dt}$

$\vec{v}_G = \dfrac{d\vec{OG}}{dt}$ = velocità di trascinamento

Ricaviamo alcune GF di interesse nel SR del CM.

(2)

- Quantità di moto totale

La posizione del CM nel SR del CM stesso vale

$$\vec{GG} = \frac{1}{m}\sum_{J=1}^{n} \vec{GP}_J\, m_J = 0$$

derivando rispetto al tempo

$$0 = \frac{1}{m}\sum_{J=1}^{n} m_J \frac{d\vec{GP}_J}{dt} = \frac{1}{m}\underbrace{\sum_{J=1}^{n} m_J \vec{v}_J}_{0 \,=\, \text{q. moto nel SR del CM}}$$

- Somma dei momenti delle forze esterne rispetto al CM

$$\vec{M}_0^{(E)} = \sum_{J=1}^{n} \vec{OP}_J \times \vec{F}_J^{(E)} = \sum_{J=1}^{n} (\vec{OG} + \vec{GP}_J) \times \vec{F}_J^{(E)} =$$

$$= \vec{OG} \times \underbrace{\sum_{J=1}^{n} \vec{F}_J^{(E)}}_{\vec{F}^{(E)}} + \underbrace{\sum_{J=1}^{n} \underbrace{\vec{GP}_J \times \vec{F}_J^{(E)}}_{\vec{M}_{G_J}^{(E)}}}_{\vec{M}_G^{(E)}}$$

$$\boxed{\vec{M}_0^{(E)} = \vec{OG} \times \vec{F}^{(E)} + \vec{M}_G^{(E)}}$$

- Momento angolare totale rispetto al SR del CM

(I teorema di König)

$$\vec{L}_0 = \sum_{J=1}^{n} \vec{OP}_J \times m_J \vec{v}_J = \sum_{J=1}^{n} (\vec{OG} + \vec{GP}_J) \times m_J (\vec{v}_G + \vec{v}_J) =$$

$$= \vec{OG} \times \underbrace{\left(\sum_{J=1}^{n} m_J\right)}_{m} \vec{v}_G + \vec{OG} \times \underbrace{\sum_{J=1}^{n} m_J \vec{v}_J}_{0} + \underbrace{\sum_{J=1}^{n} m_J \vec{GP}_J}_{m\vec{GG}=0} \times \vec{v}_G + \underbrace{\sum_{J=1}^{n} \vec{GP}_J \times m_J \vec{v}_J}_{\vec{L}_G}$$

$$\boxed{\vec{L}_0 = \vec{OG} \times m \vec{v}_G + \vec{L}_G}$$

- Equazione del moto

Rispetto ad un SRI vale

$$\vec{M}_O^{(E)} = \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\vec{OG} \times m\vec{v}_G + \vec{L}_G\right] = \vec{v}_G \times m\vec{v}_G + \underbrace{+\ \vec{OG} \times m\vec{a}_G}_{\vec{F}^{(E)}} + \frac{d\vec{L}_G}{dt}$$

$$\downarrow$$

$$OG \times \vec{F}^{(E)} + \vec{M}_G^{(E)}$$

$$\boxed{\vec{M}_G^{(E)} = \frac{d\vec{L}_G}{dt}}$$

Oss

L'equazione del moto nel SR del CM ha la stessa forma come se fosse in un SRI !

- Energia Cinetica (II teorema di König)

$$E_C = \sum_{J=1}^{n} \frac{1}{2} m_J v_J^2 = \frac{1}{2}\sum_{J=1}^{n} m_J(\vec{v}_J' + \vec{v}_G)^2 = \frac{1}{2}\sum_{J=1} m_J\left(v_J'^2 + v_G^2 + 2\,\vec{v}_J'\cdot\vec{v}_G\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{J=1}^{n} m_J v_J'^2}_{E_C' \text{ nel SR del CM}} + \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{J=1}^{n} m_J}_{m} v_G^2 + \underbrace{\left(\sum_{J=1}^{n} m_J \vec{v}_J'\right)}_{0}\cdot\vec{v}_G =$$

(L'en. cin. totale nel SRI) = (en. cin nel SR del CM) +

+ (en. cin di tutta la massa concentrata nel CM e pertanto in moto con velocità $\vec{v}_G$ rispetto al SRI)