Dinamica dei moti relativi: equazione del moto in un SR non inerziale

L'equazione del moto vale solo nei SRI; tuttavia la legge oraria che se ne ricava potrebbe essere trasferita in un SR non inerziale mediante la cinematica dei moti relativi. È dunque lecito chiedersi se si può studiare l'eq. moto direttamente in un SR non inerziale

$S_A = SRI$ $\quad$ S_R qualsiasi

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}_A} \qquad \boxed{\vec{a}_A = \vec{a}_R + \vec{a}_{tr} + \vec{a}_{co}}$$

$$\vec{F} = m\vec{a}_R + m\vec{a}_{tr} + m\vec{a}_{co} \Rightarrow \boxed{\vec{F} \underbrace{\underbrace{- m\vec{a}_{tr}}_{\text{forza di trasc.} = \vec{F}_{tr}} \underbrace{- m\vec{a}_{co}}_{\vec{F}_{co} = \text{forza di Coriolis}}}_{\text{forze "fittizie"}} = m\vec{a}_R}$$

Oss 1

Se alle forze vere $\vec{F}$, ossia quelle che derivano dall'interazione del corpo di massa m con gli altri corpi, aggiungessimo le forze fittizie $\vec{F}_{tr}$ e $\vec{F}_{co}$ otterremmo un'equazione del moto valida in ogni SR anche non inerziale

$$\boxed{\vec{F} + \vec{F}_{fit} = m\vec{a}_R}$$

In alcuni SR la soluzione con le forze fittizie può risultare più semplice.

Oss 2

Le forze fittizie non derivano dall'interazione fra corpi ma sono solamente un artificio matematico per far valere l'equazione del moto in un SR non inerziale. Per esse non vale il III PD, in quanto manca il corpo con il quale avviene l'interazione.

$$\boxed{\vec{F} - m\vec{a}_{tr} - m\vec{a}_{co} = m\vec{a}_R} \qquad \forall \, SR$$

$$\vec{a}_{tr} = \vec{a}_{\Omega} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_R)$$

$$\vec{a}_{co} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_R$$

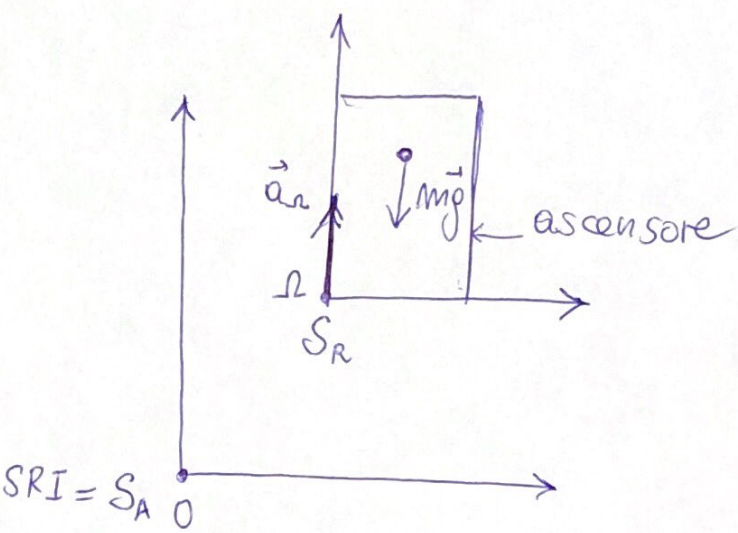
Es 1

caduta di un grave

- rispetto a S_A:

$$m\vec{g} = m\vec{a}_A$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a}_A = \vec{g}}$$



- rispetto a S_R

S_R è in trasloz. $(\vec{\omega} = 0)$

$$\vec{a}_{tr} = \vec{a}_{\Omega}$$

$$\vec{a}_{co} = 0$$

$$m\vec{g} - m\vec{a}_{tr} = m\vec{a}_R$$

$$\boxed{a_R = \vec{g} - \vec{a}_{tr}}$$

- se l'ascensore è in caduta libera $\vec{a}_{tr} = \vec{g}$

$\vec{a}_R = 0$

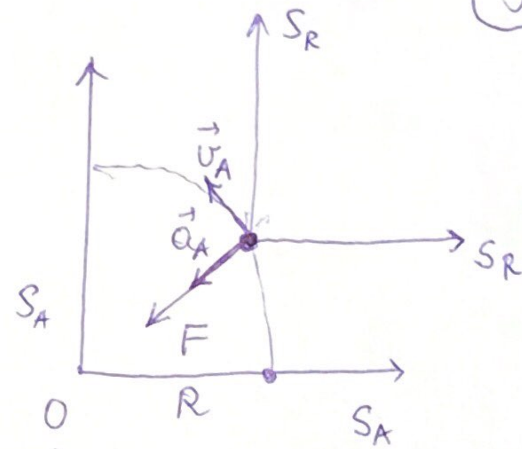
- se invece è accelerato verso l'alto con $\vec{a}_{tr} = -\vec{g}$

$\vec{a} = 2\vec{g}$

Es 2

Moto circolare uniforme

Studio nel SR solidale alla particella traslante e ($\vec{\omega}=0$)



(a)

- $\vec{F} = m\vec{a}_A$ in S_A

$\vec{F}$ = forza centripeta che genera il moto (p.es. attrito)

$\vec{a}_\Omega = \vec{a}_A \qquad |\vec{a}_A| = |\vec{a}_\Omega| = v_A^2/R$

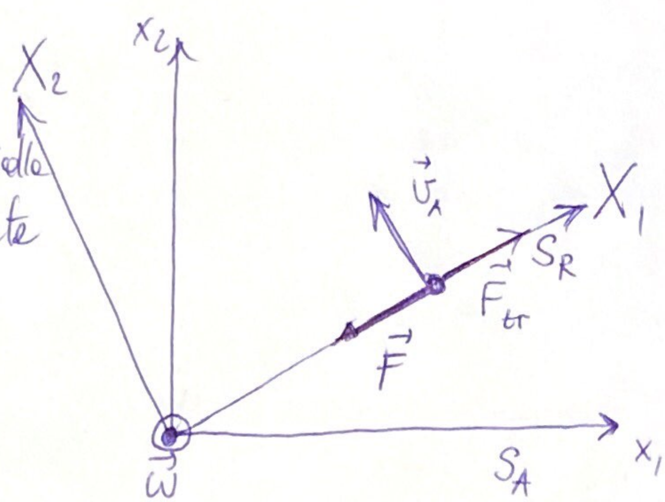
- in $S_R \qquad \vec{a}_{tr} = \vec{a}_\Omega \qquad \vec{a}_{co} = 0$

$$\underbrace{\vec{F} \underbrace{- m a_\Omega}_{\text{forza centrifuga} = \vec{F}_{tr}}}_{0} = m\vec{a}_R$$

$$0 = m\vec{a}_R \Rightarrow \boxed{\vec{a}_R = 0}$$

(b)

S_R è in rotazione con l'origine $\Omega = O$ in modo tale che la particella rimane sempre in quiete sull'asse X_1



- in $S_R \quad \vec{a}_\Omega = 0$

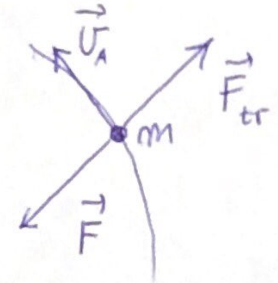
$\vec{a}_{tr} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_R)$

$\vec{r}_R = \vec{r}_A \Rightarrow \vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_A$

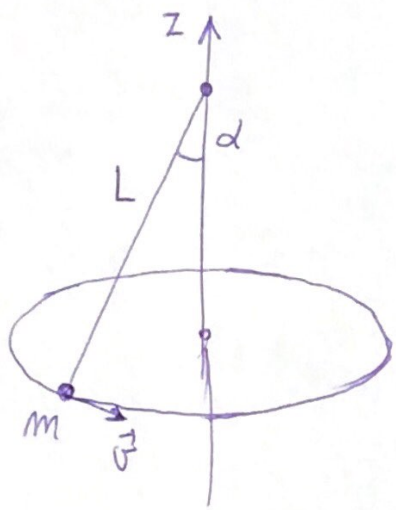
$\Rightarrow \vec{a}_{tr} = \vec{\omega} \times \vec{v}_A \qquad \vec{F}_{tr} = -m\vec{a}_{tr} = -m\vec{\omega} \times \vec{v}_A$

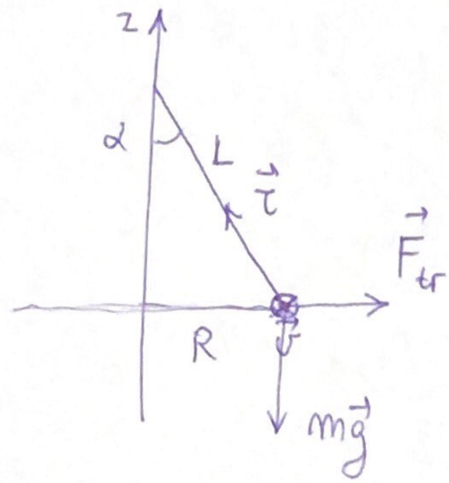
$$|\vec{F}_{tr}| = m\omega^2 R = m\frac{v_A^2}{R} = |\vec{F}|$$

$$\vec{F} + \vec{F}_{fit} = m\vec{a}_R = 0 \qquad \boxed{\vec{a}_R = 0}$$



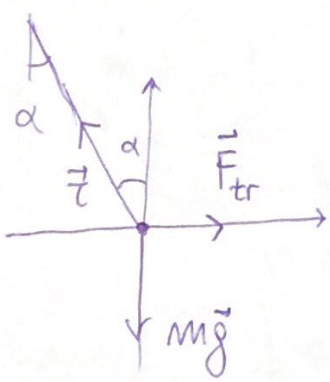
(c) pendolo conico





Nel SR solidale alla massa ruotante

$$\vec{F} + \vec{F}_{tr} = 0 \qquad \vec{F} = \vec{\tau} + m\vec{g} \qquad \vec{F}_{tr} = \text{forza centrif.}$$



$$|\vec{F}_{tr}| = m\frac{v^2}{R}$$

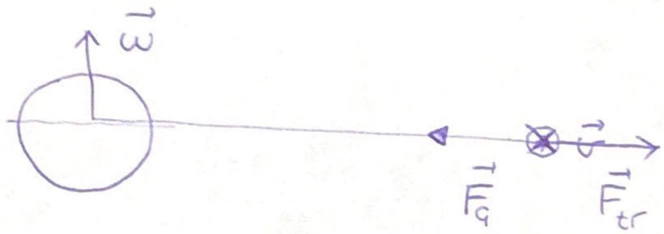
$$\begin{cases} \tau\cos\alpha - mg = 0 \\ -\tau\sin\alpha + m\dfrac{v^2}{L\sin\alpha} = 0 \end{cases}$$

$$-\operatorname{tg}\alpha + \frac{v^2}{Lg\sin\alpha} = 0 \qquad \sin\alpha\operatorname{tg}\alpha = \frac{v^2}{Lg}$$

Per piccole inclinazioni $\sin\alpha \sim \alpha$ $\operatorname{tg}\alpha \sim \alpha$ $\boxed{\alpha^2 = \dfrac{v^2}{Lg}}$

(d) orbita dei satelliti geostazionari

$$T = 86400 \cdot \frac{365}{366} = 86164 \text{ s} = \text{durata giorno siderale}$$



$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 7.29\ 10^{-5} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

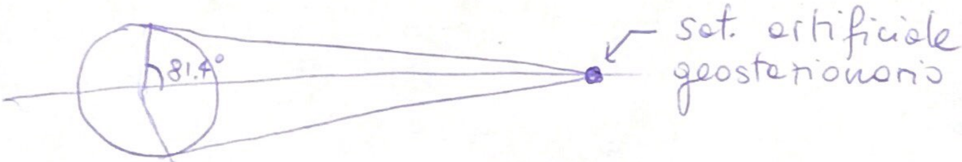
$$0 = \vec{F}_g + \vec{F}_{tr} \implies G\frac{Mm}{r^2} = m\omega^2 r = m\frac{4\pi^2}{T^2} r$$

$$r = \left(\frac{GMmT^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} = 42.168\ 10^6 \text{ m} \qquad R = 6.371\ 10^6 \text{ m}$$

$r - R \simeq 36\,000$ km sopra la Terra

Oss

Le orbite geostazionarie sono particol. pregiate per scopi militari, comunicazioni, prev. del tempo, ecc.. in quanto si osserva quasi un emisfero

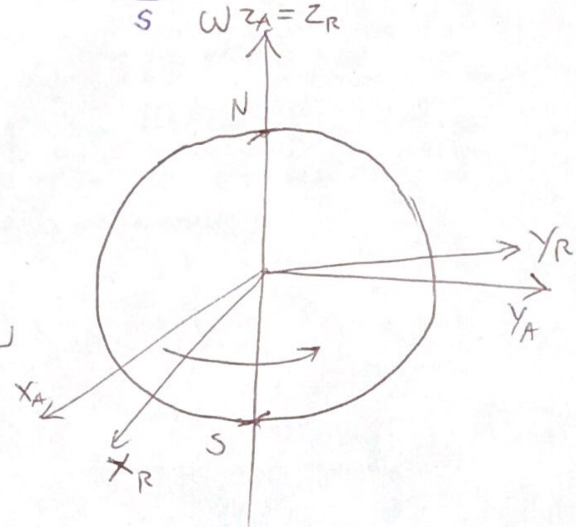


In natura esistono sistemi stazionari quali Plutone e Caronte

Effetti della rotazione terrestre

la Terra ruota su sè stessa con velocità angolare costante

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{86400 \cdot \frac{365}{366}} = 7.29\ 10^{-5}\ \frac{rad}{s}$$

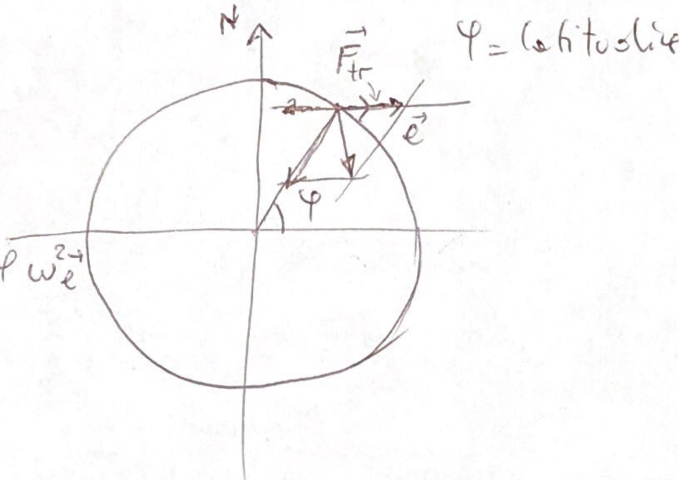


$$\vec{F}_A = m_A \vec{a}_A = -G\frac{Mm}{R^2}\vec{N}$$

$$m\vec{a}_R = -G\frac{Mm}{R^2}\vec{N} \underbrace{- m\vec{a}_{tr}}_{\vec{F}_{tr}} \underbrace{- m\vec{a}_{co}}_{\vec{F}_{co}}$$

$$|\vec{a}_{tr}| = R\cos\varphi\, \omega^2$$

Influenza della latitudine sull'acc. di gravità



$$\vec{v}_R = 0$$

$$m\vec{a}_R = m\vec{g} = -G\frac{Mm}{R^2}\vec{N} + mR\cos\varphi\,\omega^2\vec{e}$$

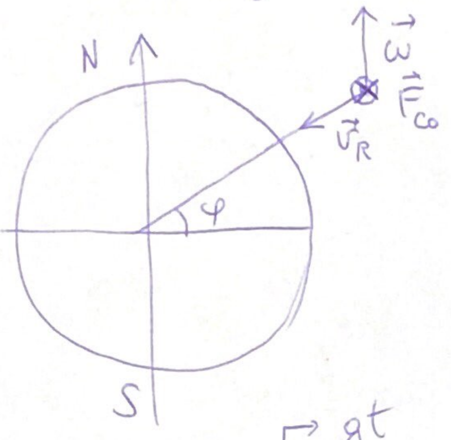
i cui effetti sono:

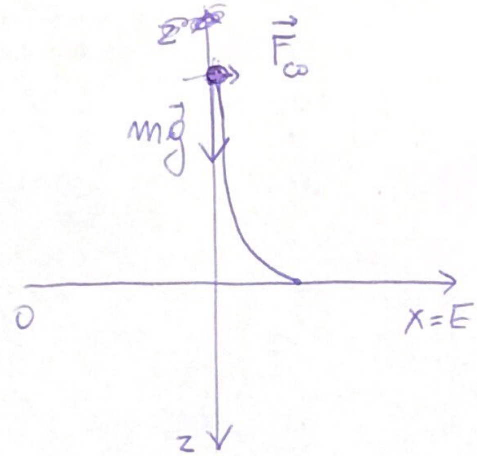
- $|\vec{g}|$ dipende da φ
- il filo a piombo non punta verso il centro della Terra

Oss

Un'ulteriore elemento che concorre a $g(\varphi)$ è lo schiacciamento della Terra

Caduta dei gravi verso oriente





$$F_{co} = 2m \overbrace{v_z}^{gt} \omega \cos\varphi = \cancel{m} a_x$$
$$m g = m a_z$$

$$v_x(t) = \cancel{2}mg \frac{t^2}{\cancel{2}} \omega \cos\varphi$$

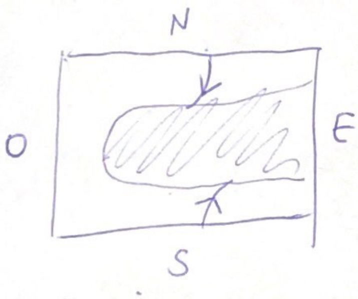
$$x(t) = 2mg \frac{t^3}{3} \omega \cos\varphi \qquad x \sim t^3$$

$$x(\tau) = h \qquad \tau = \left(\frac{2h}{g}\right)^{1/2}$$

$$x(\tau) = \frac{mg}{3}\left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2} \omega \cos\varphi$$

Altri effetti

- deriva dei fiumi



nell'emisfero boreale
il contrario in quello australe

- cicloni

cicloni anticicloni