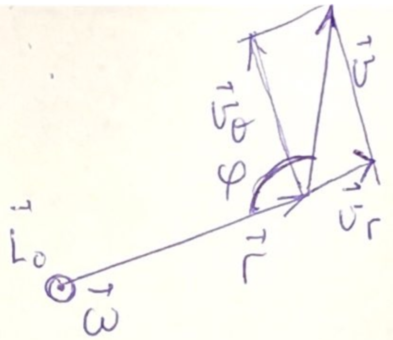
(b) moto piano



- $\vec{L}_0 = \vec{r} \times \vec{v} = \vec{r} \times (\vec{v}_r + \vec{v}_\theta) =$

  $= \vec{r} \times \vec{v}_\theta$

  $L_0 = r v_\theta = r v \sin\varphi$

- $\omega = \dfrac{v_\theta}{r}$

$\vec{\omega}$ e $\vec{L}_0$ sono paralleli e vale $\boxed{\vec{L}_0 = m r^2 \vec{\omega}}$

Equazione del moto

Rispetto ad un SRI vale $\vec{F} = m\vec{a}$

$\vec{M}_0$ = momento della somma di tutte le forze che agiscono su m

$$\vec{M}_0 = \vec{OP} \times \vec{F} =$$

Sia $\vec{L}_0$ il momento angolare $\vec{L}_0 = \vec{OP} \times m\vec{v}$

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{OP} \times m\vec{v}) = \underbrace{\frac{d\vec{OP}}{dt}}_{\vec{v}} \times m\vec{v} + \vec{OP} \times m\underbrace{\frac{d\vec{v}}{dt}}_{\vec{a}}$$

se O è anche l'origine $\rightarrow$ $\underbrace{\vec{v} \times m\vec{v}}_{0}$ $\quad$ $\underbrace{\vec{OP} \times \underbrace{m\vec{a}}_{\vec{F}}}_{\vec{M}_0}$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{M}_0}$$

Oss!

Tale equazione contiene "$\vec{F} = m\vec{a}$" e dunque può essere utilizzata al suo posto

Analogie

$\rightarrow$ descrizione del moto

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}} \rightarrow \text{cause del moto}$$

$\rightarrow$ descrizione del moto rotazionale attorno al polo O

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{M}_0} \rightarrow \text{cause del moto rotazionale attorno al polo O}$$

Pertanto $\boxed{\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{M}_0}$ è un'equazione particolarmente utile allo studio delle rotazioni.

Teorema del momento angolare

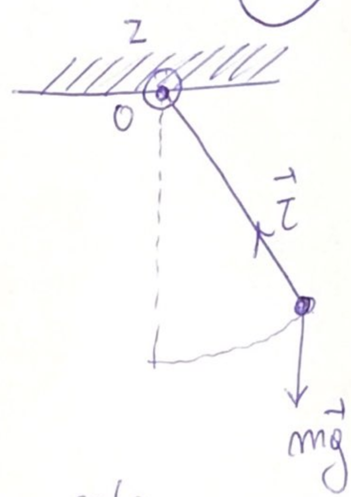
L'impulso del momento della risultante delle forze è pari alla variazione del momento angolare in un intervallo di tempo

Dim

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_0(t)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{L}_0}{dt}\, dt = \vec{L}_0(t_2) - \vec{L}_0(t_1) = \Delta\vec{L}$$

Es

pendolo semplice



- $\dfrac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{M}_0$
- $\vec{L}_0 = m r^2 \vec{\omega}$
- $\vec{M}_0 = \vec{r} \times (m\vec{g} + \vec{\tau}) = \vec{r} \times m\vec{g}$

La grande semplificazione è che solo la componente z è non nulla

- $\dfrac{dL_{0z}}{dt} = M_{0z}$
- $L_{0z} = m r^2 \dfrac{d\theta}{dt}$
- $M_{0z} = -mgr\sin\theta$

$$\frac{dL_{0z}}{dt} = m r^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgr\sin\theta$$

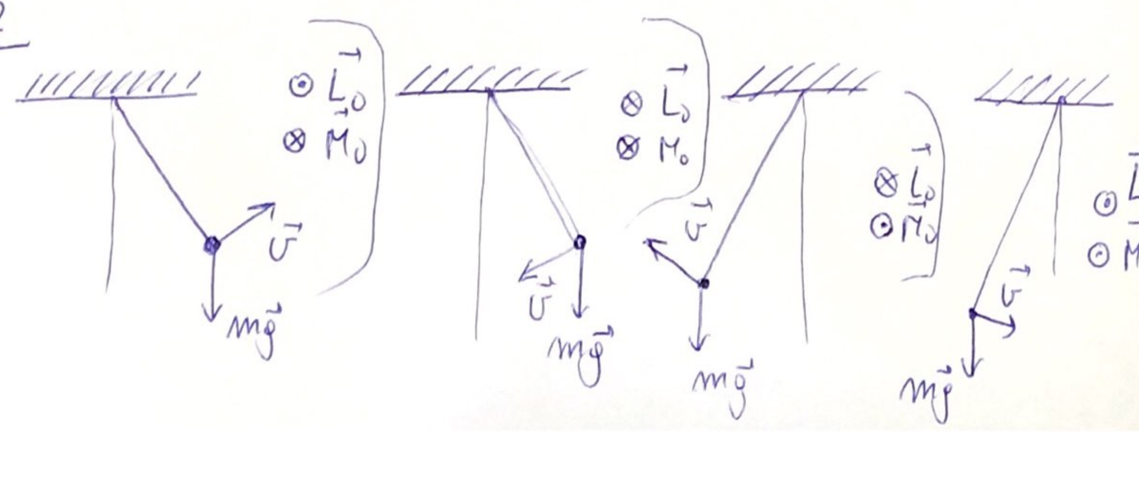
$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{r}\sin\theta}$$

Oss 1

In questa risoluzione ho solo la coordinata z mentre con $\vec{F} = m\vec{a}$ avevo due coordinate (lungo $\vec{N}$ e $\vec{T}$) dunque il primo metodo è più semplice del secondo.

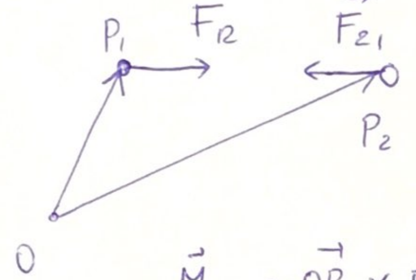
Oss 2



Seconda equazione cardinale

Rispetto ad un SRI considero due PM isolati e interagenti; vale $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$. Rispetto ad un qualsiasi polo vale anche $\boxed{\vec{M}_{O12} = -\vec{M}_{O21}}$

Dim



$$\vec{M}_{O12} = \vec{OP_1} \times \vec{F}_{12}$$
$$\vec{M}_{O21} = \vec{OP_2} \times \vec{F}_{21}$$

$$\vec{M}_{O21} = \vec{OP_2} \times \vec{F}_{21} = (\vec{OP_1} + \vec{P_1P_2}) \times \vec{F}_{21} =$$
$$= \vec{OP_1} \times \vec{F}_{21} + \underbrace{\vec{P_1P_2} \times \vec{F}_{21}}_{0} = -\vec{OP_1} \times \vec{F}_{12} = -\vec{M}_{O12}$$

Si consideri ora un sistema di n particelle interagenti mediante forze interne e esterne. L'eq del moto per la i-esima particella vale:

$$\vec{M}_{Oi} = \vec{M}^{(E)}_{Oi} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \vec{M}_{Oij} = \frac{d\vec{L}_{Oi}}{dt}$$

sommando su i

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{Oi}}_{\text{somma momenti tutte forze}} = \underbrace{\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \vec{M}^{(E)}_{Oi}}_{\text{somma momenti forze est.}}}_{\vec{M}^{(E)}_{O}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \vec{M}_{Oij}}_{\text{somma momenti forze int} \; \} \; 0} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{L}_{Oi}}{dt}}_{\frac{d}{dt} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \vec{L}_{Oi}}_{\underbrace{\text{momento angolare totale}}_{\vec{L}_O}}}$$

$$\boxed{\vec{M}_O^{(E)} = \frac{d\vec{L}_O}{dt}} \leftarrow \text{II equazione cardinale}$$

5

Oss

Tale equazione descrive il moto d'insieme del sistema di particelle nel suo moto di rotazione attorno al polo O.