Dinamica rotazionale

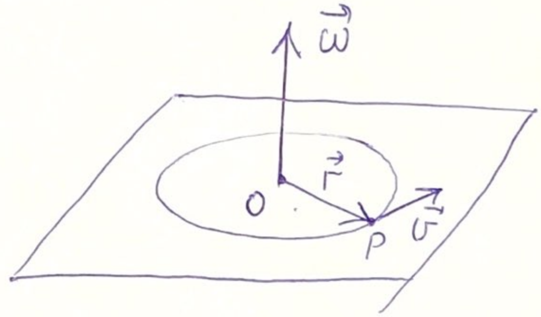
Si intende cercare un'equazione del moto che sostituisce $\vec{F} = m\vec{a}$ per lo studio della dinamica rotazionale di un punto materiale.

Vettore velocità angolare

Se un punto materiale si muove di moto circolare con velocità angolare $\omega(t)$, ad esso può venire associato un vettore velocità angolare:

$$\vec{\omega}(t) = \begin{cases} \cdot \text{ modulo pari a } |\omega(t)| \\ \cdot \text{ direzione perpendicolare al piano del moto} \\ \cdot \text{ verso in accordo con la "regola della mano destra"} \end{cases}$$

$\omega r = v$



Si dimostra che

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

Oss!

- se il moto è circolare e uniforme $\vec{\omega}$ = costante
- se il moto avviene sullo stesso piano $\vec{\omega}$ mantiene lo stesso verso
- se $\vec{\omega}(t)$ varia direzione significa che il piano di rotazione varia nel tempo come per esempio una trottola in precessione

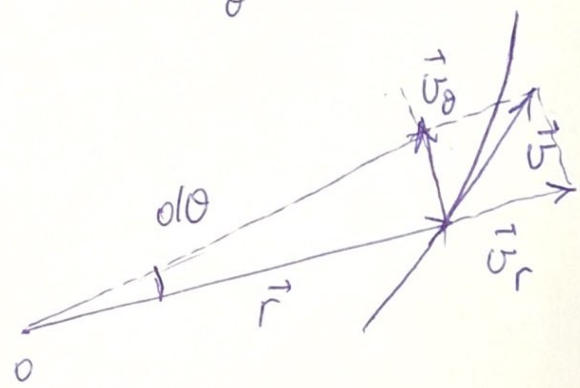
Accelerazione angolare

$$\vec{\alpha}(t) = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Oss 2

Nel caso di moto piano qualsiasi è ancora possibile definire una velocità angolare $\omega(t)$ limitandola alla componente di $\vec{v}$ che produce rotazione, ossia la componente azimutale $\vec{v}_\theta$

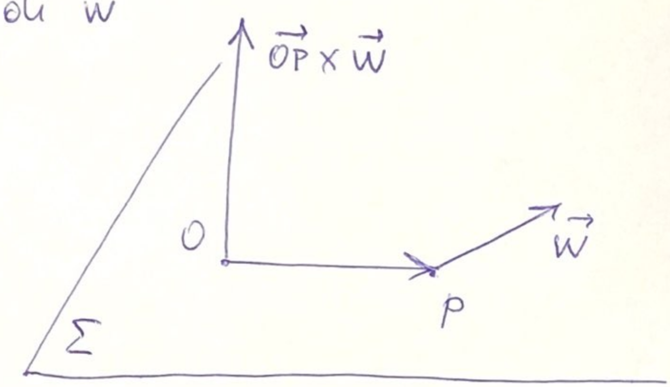
$$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt} = \frac{v_\theta(t)}{r(t)}$$



Momento di un vettore $\vec{w}$ rispetto ad un polo O

Sia Σ il piano che contiene O e $\vec{w}$ si dice momento di $\vec{w}$ rispetto a O:

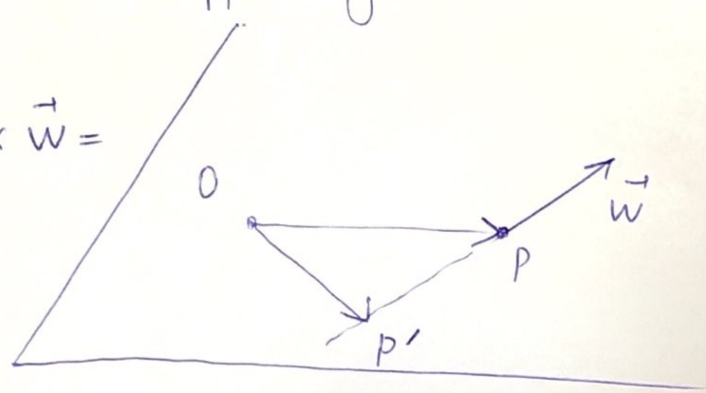
$$\vec{OP} \times \vec{w}$$



Oss

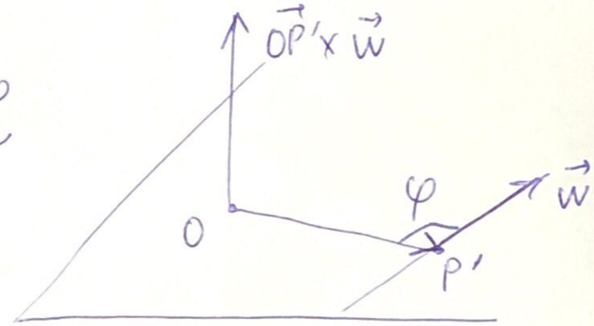
Il momento di $\vec{w}$ rispetto a O non dipende dalla scelta di P purché esso appartenga alla retta che contiene $\vec{w}$

$$\vec{OP} \times \vec{w} = (\vec{OP'} + \vec{P'P}) \times \vec{w} =$$
$$= \vec{OP'} \times \vec{w} + \underbrace{\vec{P'P} \times \vec{w}}_{0}$$



Quando P' è scelto tale che $\vec{OP'}$ è $\perp$ a $\vec{w}$, il vettore $\vec{OP'}$ è detto "braccio di $\vec{w}$"

$$|\vec{OP'} \times \vec{w}| = |\vec{OP'}|\,|\vec{w}|\,\underbrace{\sin\varphi}_{1}$$



Momento di una forza rispetto ad un polo

$$\boxed{\vec{M}_0 = \vec{OP} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}}$$

se il polo coincide con l'origine del SR

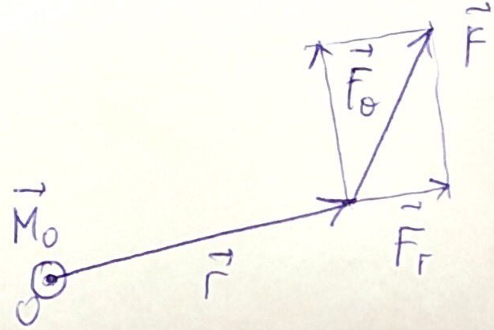
$$[M_0] = [L]^2[T]^{-2}[M]^1 = [Nm]$$

Poiché tale grandezza non esprime una capacità di compiere lavoro, NON possiamo dire che la sua unità di misura sia il Joule

Oss

Il momento $\vec{M}_0$ è una GF atta allo studio della dinamica rotazionale poiché essa dipende solo dalla componente della forza che produce rotazione attorno al polo, $\vec{F}_\theta$

$$\vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times (\vec{F}_r + \vec{F}_\theta) =$$
$$= \underbrace{\vec{r} \times \vec{F}_r}_{0} + \vec{r} \times \vec{F}_\theta$$



Il prodotto vettoriale "filtra" la componente della $\vec{F}$ che non produce rotazione

Momento delle quantità di moto o momento angolare

$$\vec{L}_0 = \vec{OP} \times m\vec{v} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

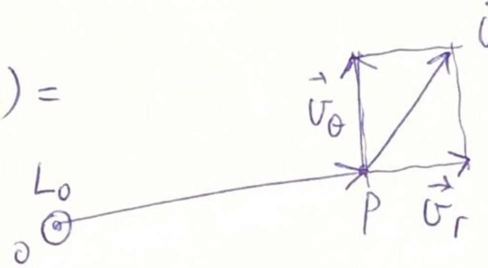
se il polo coincide con l'origine del SR

$$[L_0] = [L]^2 [T]^{-1} [M]^1 = [kg\, m^2/s]$$

Oss 1

Il momento angolare è dipendente solo dalla componente azimutale della velocità, $\vec{v}_\theta$, ossia alla componente legata alla rotazione attorno al polo O.

$$\vec{L}_0 = \vec{OP} \times m\vec{v} = \vec{OP} \times m(\vec{v}_\theta + \vec{v}_r) =$$
$$= \vec{OP} \times m\vec{v}_\theta + \underbrace{\vec{OP} \times m\vec{v}_r}_{0}$$



Oss 2

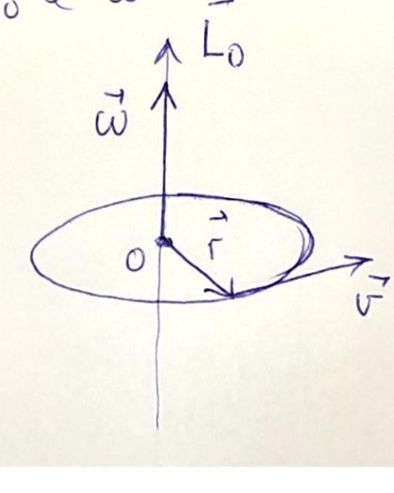
Il momento angolare è legato alle rotazioni attorno ad un punto, il polo; la velocità angolare vettoriale è legata alle rotazioni attorno ad un asse. Se il polo è scelto appartenente all'asse di rotazione esiste un legame fra i due vettori $\vec{L}_0$ e $\vec{\omega}$

(a) moto circolare

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad v = \omega r$$
$$\vec{L}_0 = \vec{r} \times m\vec{v} \qquad L_0 = mvr$$

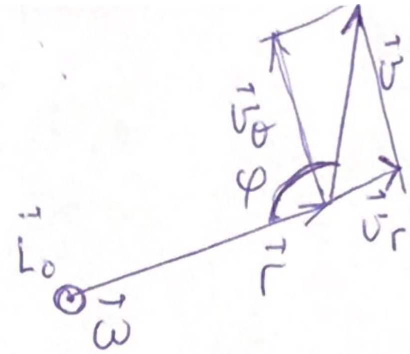
i vettori $\vec{\omega}$ e $\vec{L}_0$ sono paralleli

$$\boxed{\vec{L}_0 = m r^2 \vec{\omega}}$$



(b) moto piano

1



• $\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{v} = \vec{r} \times (\vec{v}_r + \vec{v}_\theta) =$

$= \vec{r} \times \vec{v}_\theta$

$L_O = r v_\theta = r v \sin\varphi$

• $\omega = \frac{v_\theta}{r}$

$\vec{\omega}$ e $\vec{L}_O$ sono paralleli e vale $\boxed{\vec{L}_O = m r^2 \vec{\omega}}$