Energia

Intuitivamente corrisponde alla "capacità di svolgere lavoro da parte di un campo di forze".
Operativamente, si dice energia in un campo di forze se $\exists$ una funzione scalare $E(\vec{r}, \vec{v}, t)$:

$$\boxed{|\mathcal{L}(P_1 \to P_2)| = |E(P_2) - E(P_1)| = |\Delta E|} \quad \forall P_1, P_2$$

L'energia è una GF molto importante, in quanto consente la risoluzione di alcuni problemi di meccanica senza la risoluzione dell'equazione del moto che talvolta può risultare complessa

Energia cinetica

È legata al movimento dei corpi, per un punto mat.

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

$$[E_c] = \left[\frac{1}{2} m v^2\right] = [m v^2] = [L]^2 [T]^{-2} [M]^1 = [\text{Joule}] = [J]$$
$$\stackrel{!}{=} [\mathcal{L}]$$

Il fatto che $\frac{1}{2} m v^2$ sia effettivamente un'energia è dovuto al seguente teorema:

Teorema dell'energia cinetica

$\mathcal{L}(P_1 \to P_2)$ = Lavoro della <u>risultante</u> di tutte le forze $= \Delta E_c$

Dim

$$\mathcal{L}(P_1 \to P_2) = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \overset{\text{SRI}}{=} \int_{P_1}^{P_2} \overbrace{m\vec{a}}^{\text{risultante forze}} \cdot d\vec{r} = m \int_{P_1}^{P_2} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} =$$

$$= m \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\, dt = m \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}\, dt =$$

$$\frac{dv^2}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 2\, \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}$$

$$= \frac{m}{2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} v^2(t)\, dt = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \Delta E_c$$

Oss 1

Il teorema vale per qualsiasi tipo di forza che concorre alla risultante delle forze, ossia alla forza che appare nell'eq. del moto.
Il teorema invece non vale per le singole forze che compaiono nell'eq. del moto

Oss 2

La quantità $\frac{1}{2}mv^2$ è a buon diritto una forma di energia poiché $|\mathcal{L}(P_1 \to P_2)| = |\Delta(\frac{1}{2}mv^2)| = |\Delta E_c|$ e la classe di forze corrispondente è la somma di tutti i campi di forza che entrano nell'eq. del moto

$\vec{F} = m\vec{a}$

Forze conservative

Considero un campo di forze:

i) $\vec{F}$ dipende solo dalla posizione

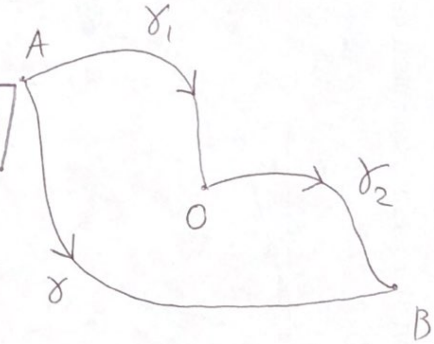
ii) $\mathcal{L}_\gamma(A \to B)$ dipende solo A, B e non da γ per ogni scelta di A, B, γ

Oss $\mathcal{L}_\gamma(A \to B) = f(A, B)$

Energia potenziale

O = riferimento dell'energia potenziale

$$\boxed{U(A) = \mathcal{L}(A \to O)}$$



$\mathcal{L}_\gamma(A \to B) = f(A, B)$

$\mathcal{L}_{\gamma_1}(A \to O) = f(A, O)$

$\mathcal{L}_{\gamma_2}(O \to B) = f(O, B) = -f(B, O)$

$$\mathcal{L}_\gamma(A \to B) = \mathcal{L}_{\gamma_1}(A \to O) + \mathcal{L}_{\gamma_2}(O \to B) = \underbrace{\underbrace{f(A,O)}_{U(A)} - \underbrace{f(B,O)}_{U(B)}}_{\text{en. pot nei punti } A,\, B}$$

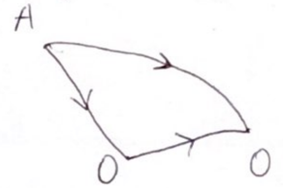
$$\boxed{\mathcal{L}(A, B) = U(A) - U(B) = -\Delta U}$$

Oss 1

Il legame con il lavoro appare a livello definitorio e ne giustifica il nome di energia, nel senso che camb. la pos. di un corpo è possibile comp. lavoro

Oss 2

L'en potenziale è legata alla scelta di O; se si cambiano riferimento O' si avrebbe:



$$\underbrace{f(A, O')}_{U'(A)} = \underbrace{f(A, O)}_{U(A)} + \underbrace{f(O, O')}_{\text{costante}}$$

$\Rightarrow$ l'en. pot è def. a meno di una costante

Es 1 (forze peso)

$$\mathcal{L}(A_1 \to B) = mg\, z_A - mg\, z_B$$

$B = 0$

$$\mathcal{L}(A \to 0) = U(A) = mg\, z_A$$

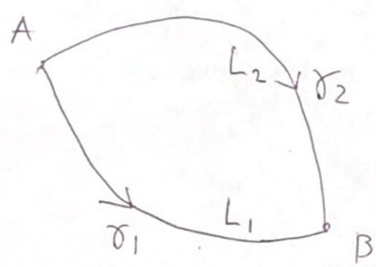
Es 2 (forze elastiche)

$$\mathcal{L}(A \to B) = \frac{1}{2} k x_A^2 - \frac{1}{2} k x_B^2$$

$B = 0$

$$\mathcal{L}(A \to 0) = U(A) = \frac{1}{2} k x_A^2$$

Es 3 (forze di attrito)



$$\mathcal{L}_{\gamma_1}(A \to B) = -\mu_d N L_1$$

$$\mathcal{L}_{\gamma_2}(A \to B) = -\mu_d N L_2$$

se $L_1 \neq L_2 \Rightarrow \mathcal{L}_{\gamma_1}(A \to B) \neq \mathcal{L}_{\gamma_2}(A \to B)$

$\Rightarrow$ non è conservativa

Oss

$\vec{F}$ = forza conservativa $\displaystyle\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \forall \gamma$

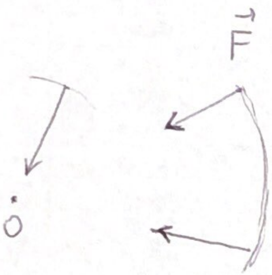
Campo di forza centrale

Un campo di forza è detto centrale se:

i) esiste un punto detto centro, al quale il vet. forza è sempre diretto

ii) il modulo della forza è una funzione solo della distanza dal centro

Es



$F(r)$

Oss

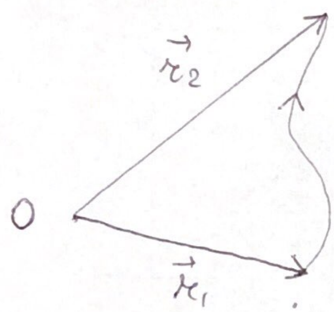
le forze gravitaz. sono un esempio di campo di forze centrale

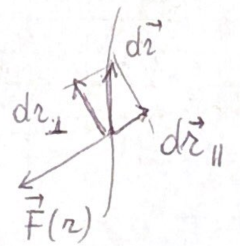
$$F(r) = G\frac{Mm}{r^2}$$

Prop

Un campo di forze $\overset{\text{cent.}}{\vee}$ è sempre conservativo

Dim





$$\mathcal{L}(P_1 \to P_2) = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot (d\vec{r}_{\parallel} + d\vec{r}_{\perp}) =$$

$$= \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}_{\parallel} + \underbrace{\int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}_{\perp}}_{0} =$$

$$= \pm \int_{P_1}^{P_2} F(r) \cdot dr = \pm \int_{r_1}^{r_2} F(r)\, dr$$

Tale $\mathcal{L}$ non dipende dal percorso che collega P_1 e P_2

Es

Per le forze gravitazionali

$$\mathcal{L}(P_1 \to P_2) = -GMm \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2}\, dr = GMm\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = U(P_1) - U(P_2)$$

$$\boxed{U(P) = -\frac{GMm}{r}}$$

l'en. pot. è sempre negativa!

Lo zero dell'energia è scelto per $r = +\infty$, cioè $\boxed{U(+\infty) = 0}$