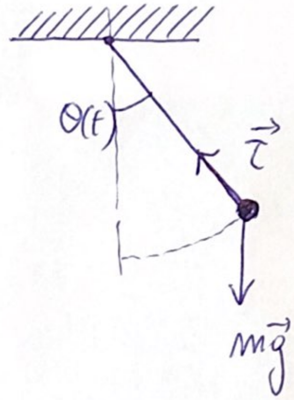
Esempi notevoli sull'equazione del moto

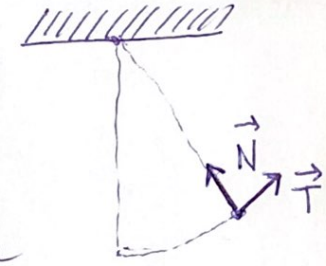
Es 1 il pendolo semplice

fune ideale $\begin{cases} \text{inestensibile} \\ \text{perfettamente flessibile} \\ \text{massa trascurabile} \end{cases}$



Equazione del moto

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{\tau}$$



Scelta del SRI: si usa un SR la cui origine coincide con la posizione della particella all'istante t e i cui versori $\vec{N}$ e $\vec{T}$ sono rispettivam. i versori radiale centr. e tang. alla circonferenza sede del moto.

$$\begin{cases} m a_N = \tau - mg\cos\theta \\ m a_T = - mg\sin\theta \end{cases}$$

Dallo studio del MC:

$$\begin{cases} a_T = \dfrac{d^2 s}{dt^2} = R\dfrac{d^2\theta}{dt^2} \\ a_N = \dfrac{1}{R}\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2 = \dfrac{R^2}{R}\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2 = R\omega^2(t) \end{cases}$$

Sostituendo:

$$\begin{cases} mR\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2 + mg\cos\theta(t) = \tau \\ \cancel{m}R\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = -\cancel{m}g\sin\theta \end{cases}$$

Se si risolve la seconda equazione, ricavando $\theta(t)$, sostituendo nella prima si ricava $\tau(t)$

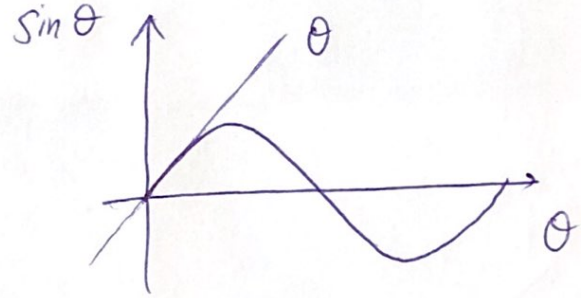
$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{R}\sin\theta = 0}$$

2

Questa è un'eq. diff. non lineare a causa di $\sin\theta$, la cui risoluzione è complessa

Si effettua pertanto la "linearizzazione" della equazione, limitandosi al caso di "piccole oscillaz."

$$\sin\theta = \theta + \ldots\ldots$$



$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{R}\,\theta = 0}$$

Si è ricavata l'equazione la cui soluz. è il MA

$$\theta(t) = \theta_0 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{R}}\,t + \varphi_0\right)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \overbrace{\frac{k}{m}}^{\omega^2} x = 0$$

che è un MA oscillatorio attorno alla verticale con pulsazione ω e periodo T

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R}} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

<u>Oss</u>

ω e T non dipendono da m per piccole oscillazioni (Galileo, 1581)

Es2 dinamica del MCU

In questo caso utilizziamo l'equaz. del moto al contrario, ossia si conosce la legge oraria $\vec{r}(t)$ e si ricavano le forze che la producono:

$$\vec{r}(t) = -R\,\vec{N}(t) \qquad \vec{v}(t) = \frac{ds}{dt}\,\vec{T}(t) = \omega R\,\vec{T}(t)$$

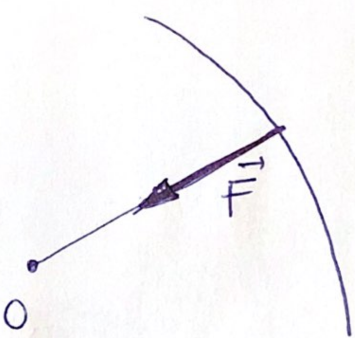
$$\vec{a}(t) = \omega^2 R\,\vec{N}(t) = -\omega^2\,\vec{r}(t)$$

Pertanto la forza vale:

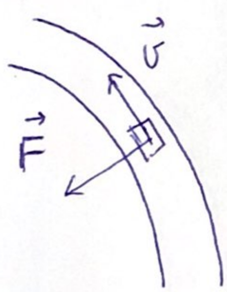
$$m\vec{a} = \vec{F} = \omega^2 R\, m\,\vec{N}(t) = -m\omega^2\,\vec{r}(t)$$

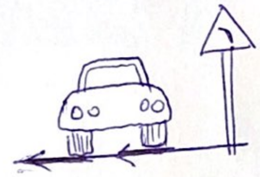
Oss

La forza che produce un MCU è una forza radiale e centripeta

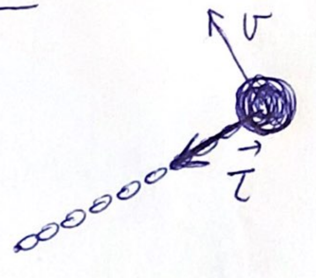


Es 1





Es 2



Es 3