

E1 – Risoluzione

L'equazione dimensionale della costante di gravitazione universale G è:

$$[G] = [L]^\alpha [M]^\beta [T]^\gamma$$

con α , β e γ le dimensioni da determinare.

Portiamo la costante G al primo membro dell'equazione:

$$G = \frac{F_{12} \cdot r^2}{m_1 \cdot m_2}$$

Sapendo che l'equazione dimensionale della forza è:

$$[F_{12}] = [M] [L] [T]^{-2},$$

che

$$[m_1] = [m_2] = [M] \quad (\alpha = \gamma = 0)$$

e che

$$[r^2] = [L]^2$$

possiamo scrivere l'equazione dimensionale della costante di gravitazione universale G come:

$$[G] = \frac{[F_{12}] \cdot [r^2]}{[m_1] \cdot [m_2]} = [M] \cdot [L] \cdot [T]^{-2} \cdot [L]^2 \cdot [M]^{-2}$$

che diventa:

$$[G] = [L]^3 \cdot [M]^{-1} \cdot [T]^{-2}$$

dove

$$\alpha = 3$$

$$\beta = -1$$

$$\gamma = -2$$

Nel SI si ha che: $[G] = [m^3 / kg \cdot s^2]$

E2 – Risoluzione

L'unità di misura dell'angolo, ovvero il radiante, è definita dal rapporto tra la lunghezza dell'arco che l'angolo sottende alla circonferenza e la lunghezza del raggio di tale circonferenza. Si tratta quindi di un rapporto tra due grandezze omogenee (che hanno cioè le stesse dimensioni) e perciò di una grandezza adimensionale. Tuttavia, per ricordare che il rapporto fra lunghezze si riferisce al rapporto arco/raggio, identificando un angolo, si suole indicare la dimensione di tale rapporto come radiante.

Se θ è l'angolo, s la lunghezza dell'arco sotteso ed r il raggio della circonferenza, l'equazione dimensionale dell'angolo sarà data da:

$$[\theta] = \frac{[s]}{[r]} = \frac{[L]}{[L]}$$

Le dimensioni dell'angolo θ sono quindi $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

E3 – Risoluzione

a) In base alla formula data, e sapendo che l'equazione dimensionale della massa m (e di m_0) che decade nel tempo t è:

$$[m] = [M]$$

e per il tempo t l'equazione dimensionale è:

$$[t] = [T]$$

Ne risulta che:

$$[M] = [M] \left[e^{-\frac{[T]}{[\tau]}} \right]$$

Dall'analisi dimensionale ne deriva che il fattore

$$\left[e^{-\frac{[T]}{[\tau]}} \right] = \frac{[M]}{[M]}$$

è una grandezza adimensionale.

Ricordando che un'eguaglianza fra grandezze fisiche implica sia l'omogeneità dimensionale di ambo i membri ma anche l'uguaglianza numerica dei membri stessi, risulta che il fattore esponenziale deve essere indipendente dall'unità di misura cioè un numero puro, quindi l'argomento deve essere esso stesso indipendente dall'unità di misura. Di conseguenza si ha che:

$$[\tau] = [T].$$

Le dimensioni della quantità τ sono:

$$\alpha = \beta = 0 \text{ e } \gamma = 1 \text{ (al solito } [\tau] = [L]^\alpha [M]^\beta [T]^\gamma \text{)}$$

b) Si può concludere che l'argomento di una funzione esponenziale è una grandezza adimensionale.

E4 – Risoluzione

L'equazione dimensionale dello spostamento x in funzione del tempo t è:

$$[x] = [L]$$

Sapendo che la funzione $\sin()$ è adimensionale, dall'analisi dimensionale risulta che $[A] = [L]$.

Scrivendo:

$$[A] = [L]^\alpha [M]^\beta [T]^\gamma, \text{ le dimensioni di A sono quindi: } \alpha = 1, \beta = \gamma = 0. \text{ Nel SI si ha che } [A] = [m]$$

L'argomento della funzione seno deve essere un angolo, quindi espresso in radianti. Ne segue che, se $[t] = [T]$, allora deve essere $[\omega] = [T]^{-1}$ e φ_0 deve essere una grandezza adimensionale.

Le dimensioni di ω sono dunque:

$$\alpha = \beta = 0 \text{ e } \gamma = -1$$

ω rappresenta infatti la velocità angolare o pulsazione e nel SI si ha che $[\omega] = [rad/s]$.

Le dimensioni di φ_0 sono invece:

$$\alpha = \beta = \gamma = 0$$

φ_0 rappresenta un angolo, quindi nel SI si ha che $[\varphi_0] = [rad]$.