Dispense del corso di Complementi di Analisi Matematica

versione preliminare

Oscar Ascenzi

Dipartimento di Matematica
Universit di Ferrara
email: oscar.ascenzi@unife.it

11 ottobre 2019

Indice

Capitolo 1

I Numeri Complessi

In questo capitolo daremo la definizione e le principali proprietà di un nuovo insieme numerico: il campo[1] dei numeri complessi $\mathbb{C}$.

La motivazione che spinge ad introdurre questo nuovo insieme numerico, quantomeno per il presente corso, viene dalla necessità di risolvere equazioni, principalmente, del secondo ordine, cioè equazioni della forma

$$ax^2 + bx + c = 0;$$

come è ben noto, le soluzioni di tale equazione sono date dalla formula

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Tale formula funziona con i seguenti accorgimenti;

1. se $b^2 - 4ac > 0$, allora la radice quadrata è ben definita e si ottengono due soluzioni reali distinte;

2. se $b^2 - 4ac = 0$, la radice non compare e si ottiene una sola soluzione, o meglio due soluzioni coincidenti.

Resta il problema del caso $b^2 - 4ac < 0$, in cui ci si trova di fronte al problema di dover calcolare

$$\sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{-|b^2 - 4ac|} = \sqrt{-1}\sqrt{|b^2 - 4ac|};$$

[1] Ricordiamo che per campo si intende un insieme K sul quale siano definite due operazioni, dette somma e prodotto e denotate con $+$ e $\cdot$, per le quali valgono le proprietà:

1. $+$ è associativa, ammette elemento neutro, denotato con 0, e ogni elemento $a \in K$ è invertibile rispetto alla somma con inversa denotata con $-a$;

2. $\cdot$ è associativa, ammette elemento neutro, denotato con 1, e ogni elemento $a \in K$ con $a \neq 0$ è invertibile rispetto al prodotto con inverso denotato con a^{-1} o $\frac{1}{a}$;

3. le operazioni di somma e prodotto godono della proprietà distributiva.

Se le operazioni di somma e prodotto sono commutative, si parla di campo commutativo o abeliano.

nella precedente espressione basta dare un senso alla radice quadrata del numero negativo -1 per ottenere una buona formula risolutiva di ogni polinomio di secondo grado, senza distinzioni sul discriminante (in realtà l'unica distinzione sarà discriminante nullo o non nullo). Si tratta quindi di trovare un insieme numerico in cui l'equazione $x^2 + 1 = 0$ abbia soluzione; come vedremo, risolvere quest'ultima equazione renderà possibile trovare le radici non solo di polinomi di secondo grado, ma di grado arbitrario e a coefficienti non reali (vedi Teorema 1.4.1).

1.1 Definizione e prime proprietà

In questa sezione daremo la definizione e le principali proprietà dei numeri complessi. Come si è visto nel corso di Analisi Matematica I, si parte dall'insieme numerico $\mathbb{N}$ sul quale sono ben definite le operazioni di somma e prodotto ma nel quale non esistono gli elementi inversi rispetto a queste due operazioni. Si introducono quindi delle estensioni di $\mathbb{N}$ in cui sono ancora definite somma e prodotto, che sono estensioni della somma e prodotto su $\mathbb{N}$, in modo che esistano gli elementi inversi rispetto alla somma (e si ottiene così l'insieme $\mathbb{Z}$) e prodotto (ottenendo così $\mathbb{Q}$). L'introduzione di $\mathbb{R}$ viene fatta in modo che ci sia completezza non tanto rispetto alle operazioni di somma e prodotto, ma rispetto alla convergenza delle successioni di Cauchy, ottenendo in definitiva le seguenti inclusioni $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Vogliamo definire qui il campo $\mathbb{C}$ in modo che $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ e che le operazioni di somma e prodotto su $\mathbb{C}$ non siano altro che estensioni della somma e prodotto su $\mathbb{R}$.

Esistono vari modi equivalenti di definire $\mathbb{C}$; quello che seguiremo è quello di tipo cartesiano.

Definizione 1.1.1 (Campo complesso) *Diremo* campo complesso*, e lo denoteremo con $\mathbb{C}$, l'insieme consistente nel piano $\mathbb{R}^2$ (che prende il nome di piano di Gauss) munito delle operazioni di somma e prodotto*

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Un generico elemento di $\mathbb{C}$ si indicherà con le ultime lettere dell'alfabeto, $z, w, \ldots$ intendendo $z = (a, b)$, ecc. La prima componente di un numero complesso si chiama parte reale*, $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(a, b) = a$ e la seconda componente si chiama parte immaginaria, $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(a, b) = b$ (si tenga ben presente che parte reale e parte immaginaria di un numero complesso sono entrambi numeri reali). Un numero complesso z si dirà reale (o reale puro) se $\mathrm{Im}(z) = 0$, mentre si dirà immaginario puro se $\mathrm{Re}(z) = 0$.*

Osservazione 1.1.2 Dato che l'insieme dei numeri complessi è definito tramite una coppia ordinata, l'uguaglianza tra numeri complessi, $z = w$ con $z = (a, b)$ e $w = (c, d)$, si verificherà se e solo se $a = c$ e $b = d$, cioè se e solo se $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(w)$ e $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(w)$. $\diamond$

La terminologia *campo* è motivata dalla seguente Proposizione.

Proposizione 1.1.3 $\mathbb{C}$ *è un campo abeliano.*

Dim. Le proprietà di associatività e commutatività della somma sono immediate, mentre quelle per il prodotto sono lasciate come verifica. Si nota quindi che gli elementi $(0,0)$ e $(1,0)$ sono elementi neutri per la somma e per il prodotto rispettivamente; si nota infine che l'elemento $-z = -(a,b) = (-a,-b)$ è l'inverso additivo di $z = (a,b)$, mentre, se $z \neq (0,0)$, allora

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right) \tag{1.1}$$

è l'inverso moltiplicativo di z. Si noti che dire $z \neq (0,0)$ significa che almeno uno tra a e b è diverso da zero, da cui il fatto che $a^2+b^2 \neq 0$ e cioè la buona definizione di z^{-1} □

Vediamo ora in che senso $\mathbb{C}$ è una estensione di $\mathbb{R}$; si nota che sull'insieme

$$R = \{(a,0) : a \in \mathbb{R}\}$$

le operazioni sopra definite si riducono a

$$(a,0)+(b,0) = (a+b,0). \quad (a,0)\cdot(b,0) = (ab,0).$$

ed inoltre

$$-(a,0) = (-a,0), \quad (a,0)^{-1} = (1/a,0), \qquad a \neq 0.$$

Identificando quindi R con $\mathbb{R}$, avremo che $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$; useremo sempre questa identificazione che ci porta a scrivere la seguente uguaglianza

$$(a,0) = a.$$

Avremo in particolare che gli elementi neutri rispetto a somma e prodotto in $\mathbb{C}$ sono gli stessi di quelli in $\mathbb{R}$, essendo $0 = (0,0)$ e $1 = (1,0)$.

Osservazione 1.1.4 Si noti che, mentre $\mathbb{R}$ è un campo ordinato, su $\mathbb{C}$ non abbiamo introdotto nessuna nozione di ordinamento; questo è dovuto al fatto che non c'è un modo naturale per estendere l'ordinamento $\leq$ su $\mathbb{C}$ e non avrà quindi senso per i numeri complessi l'espressione $z \leq w$. ⋄

Notiamo inoltre che, con le notazioni appena introdotte, si ha:

$$(0,1)\cdot(0,1) = (-1.0) = -1,$$

cioè l'elemento $i = (0,1)$ ha la proprietà che $i^2 = -1$; tale elemento verrà chiamato unità immaginaria. In questo modo siamo arrivati a poter scrivere un numero complesso, oltre che con la notazione cartesiana, anche in notazione algebrica. Infatti, abbiamo che

$$(a,b) = (a,0)+(0,b) = (a,0)+(0,1)\cdot(b,0) = a+ib.$$

La definizione algebrica dei numeri complessi passa quindi attraverso la definizione di un numero *speciale* i con la proprietà che $i^2 = -1$, e definendo numero complesso tutte le possibili combinazioni lineari degli elementi 1 e i, cioè tutti i numeri della forma appunto

$$a + ib, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

In questo modo l'operazione di prodotto diventa più intuitiva; infatti dati due numeri complessi $a + ib, c + id$, abbiamo, tenendo presente che $i^2 = -1$,

$$(a + ib) \cdot (c + id) = a \cdot c + a \cdot id + ib \cdot c + ib \cdot id = ac - bd + i(ad + bc).$$

1.2 Coniugato e modulo di un numero complesso

Sui numeri complessi è definita l'operazione di coniugio; dato cioè un numero complesso $z = a + ib$, si definisce il numero complesso $\overline{z}$ detto coniugato di z tramite

$$\overline{z} = a - ib.$$

Per l'operazione di coniugio abbiamo le seguenti proprietà.

Proposizione 1.2.1 *Siano $z, w \in \mathbb{C}$; allora*

1. $\overline{\overline{z}} = z$ *(proprietà involutiva del coniugio);*
2. $\overline{z} = z$ *se e solo se* z *reale;*
3. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$*;*
4. $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$*;*
5. *se* $z \neq 0$*, allora* $\overline{1/z} = 1/\overline{z}$*;*
6. $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$*,* $z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}(z)$*.*

Dim. Basta scrivere z e w in forma algebrica $z = a + ib$, $w = c + id$ e verificare le identità; vediamo solamente le dimostrazioni di 4. e 5. Dato che $zw = (ac - bd) + i(ad + bc)$, segue che $\overline{zw} = (ac - bd) - i(ad + bc)$, mentre

$$\overline{z} \cdot \overline{w} = (a - ib)(c - id) = (ac - bd) + i(-ad - bc)$$

da cui la 4. Per la 5. si nota che da (1.1) applicata a z e $\overline{z}$, si ottiene che

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2}, \quad \frac{1}{\overline{z}} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i\frac{b}{a^2 + b^2},$$

da cui la 5. □

Notiamo che scrivendo $z = a + ib$ si ottiene che $z\overline{z} = a^2 + b^2$, e quindi il fatto che $z\overline{z}$ è un numero reale positivo. Possiamo quindi dare la seguente definizione.

Definizione 1.2.2 (Modulo in $\mathbb{C}$) *Dato un numero complesso $z \in \mathbb{C}$, si definisce il modulo di z tramite*

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}}.$$

Osservazione 1.2.3 Non si deve confondere la notazione di modulo di un numero complesso con quella di valore assoluto di un numero reale; tuttavia, le due nozioni coincidono nel caso in cui z sia reale puro, in quanto in questo caso $b = 0$ e quindi

$$|z| = \sqrt{a^2} = |a|.$$

$\diamond$

Per il modulo di un numero complesso valgono le seguenti proprietà.

Proposizione 1.2.4 *Siano $z, w \in \mathbb{C}$; allora*

1. $|z| \geq 0$, $|z| = 0$ *se e solo se* $z = 0$;
2. $|z| = |\overline{z}|$, $|-z| = |z|$;
3. $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$, $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$, $|z| \leq |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|$;
4. *se* $z \neq 0$, $|1/z| = 1/|z|$, $1/z = \overline{z}/|z|^2$;
5. $|zw| = |z||w|$;
6. $|z + w| \leq |z| + |w|$ *(disuguaglianza triangolare);*
7. $|z + w| \geq ||z| - |w||$ *(seconda disuguaglianza triangolare).*

Dim. Si scrivono $z = a + ib$ e $w = c + id$ e le proprietà 1., 2. e 3. sono immediate. Notando poi che per $z \neq 0$

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \left|\frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}\right| = \sqrt{\frac{a^2}{(a^2+b^2)^2} + \frac{b^2}{(a^2+b^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{|z|}$$

da cui la 4. (la seconda proprietà della 4. segue direttamente dalla definizione $|z|^2 = z\overline{z}$). Per la 5., si nota che, dalle proprietà del coniugio, si ottiene:

$$|zw|^2 = zw\overline{zw} = zw\overline{z} \cdot \overline{w} = z\overline{z}w\overline{w} = |z|^2|w|^2.$$

Per quanto riguarda la disuguaglianza triangolare, tenendo presente la proprietà 6. della Proposizione 1.2.1 e la 3. di questa Proposizione, si ha:

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)\overline{(z+w)} = z\overline{z} + w\overline{w} + z\overline{w} + \overline{z\overline{w}} = |z|^2 + |w|^2 + 2\mathrm{Re}(z\overline{w}) \\ &\leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z\overline{w}| = |z|^2 + |w|^2 + 2|z| \cdot |w| \\ &= (|z| + |w|)^2, \end{aligned}$$

da cui la 6. Per quanto riguarda la 7., basta notare che

$$|z| = |z - w + w| \leq |z - w| + |w|,$$

da cui $|z| - |w| \leq |z - w|$; analogamente

$$|w| \leq |w - z| + |z| = |z - w| + |z|,$$

da cui $|w| - |z| \leq |z - w|$. Mettendo insieme queste due disuguaglianze, si ottiene la 7. $\square$

1.3 Forma polare ed esponenziale

Nelle sezioni precedenti abbiamo introdotto le forme cartesiana ed algebrica di un numero complesso; in questa sezione introdurremo la forma polare ed esponenziale. Il vantaggio di queste nuove definizioni è che, mentre la forma cartesiana e algebrica è comoda quando si vogliono sommare due numeri complessi, la forma polare ed esponenziale lo sono nella moltiplicazione.

La definizione della forma polare di un numero complesso segue dall'osservazione che un numero complesso $z = a + ib = (a, b)$ rappresenta un punto nel piano $\mathbb{R}^2$ ed è quindi determinato dalle sue coordinate polari (ϱ, ϑ), dove $\varrho = \sqrt{a^2 + b^2}$ rappresenta la distanza del punto (a, b) dall'origine e coincide con il modulo del numero complesso, $\varrho = |z|$, mentre l'angolo ϑ, detto argomento o anomalia e denotato con $\vartheta = \arg(z)$, rappresenta l'angolo, preso in senso antiorario, formato dal semiasse $\{x = 0, y \geq 0\}$ e la semiretta originata in $(0, 0)$ e passante per (a, b). Si nota che mentre ϱ è univocamente determinato, l'angolo ϑ è individuato a meno di multipli di 2π (fa eccezione l'origine, che è individuata da $\varrho = 0$ ma non ha un ϑ determinato) ed è univocamente determinato in un intervallo semiaperto di ampiezza 2π; si parla in questo caso di argomento principale di z e come intervallo si può scegliere $(-\pi, \pi]$ (o $[0, 2\pi)$ a seconda dei casi). Per passare dalla forma algebrica alle coordinate polari del numero $z = a + ib$ si possono usare, nel caso $z \neq 0$, le formule

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \varrho \cos\vartheta \\ b = \varrho \operatorname{sen}\vartheta \end{array} \right. , \qquad \left\{ \begin{array}{l} \varrho = \sqrt{a^2 + b^2} \\[2ex] \cos\vartheta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\[2ex] \operatorname{sen}\vartheta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{array} \right. \tag{1.2}$$

Possiamo quindi dare la seguente definizione.

Definizione 1.3.1 (Forma polare) *Dato $z \in \mathbb{C}$, si chiama forma polare (o trigonometrica) l'espressione di z usata utilizzando le coordinate polari*

$$z = \varrho(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta).$$

Uno dei maggiori vantaggi della rappresentazione polare dei numeri complessi si presenta quando si deve fare il prodotto di due numeri complessi. Supponiamo infatti di avere due numeri complessi $z = \varrho(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta)$, $w = r(\cos\phi + i\operatorname{sen}\phi)$, otteniamo che

$$zw = \varrho r(\cos(\vartheta+\phi) + i\operatorname{sen}(\vartheta+\phi)), \quad \frac{z}{w} = \frac{\varrho}{r}(\cos(\vartheta-\phi) + i\operatorname{sen}(\vartheta-\phi)), \tag{1.3}$$

cioè la moltiplicazione per il numero w è data da una dilatazione pari a r e una rotazione di un angolo ϕ. In particolare, se $w = z$, si ottiene che

$$z^2 = \varrho^2(\cos 2\vartheta + i\operatorname{sen} 2\vartheta),$$

o più in generale, per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$z^n = \varrho^n(\cos n\vartheta + i\operatorname{sen} n\vartheta); \tag{1.4}$$

le formule (1.3) e (1.4) prendono anche il nome di Formule di De Moivre. Dato che la funzione

$$f(\vartheta) = \cos\vartheta + i\operatorname{sen}\vartheta,$$

ha la proprietà che $f(\vartheta_1)f(\vartheta_2) = f(\vartheta_1+\vartheta_2)$, ha senso la seguente definizione.

Definizione 1.3.2 *Si definisce l'esponenziale immaginario come la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ data da*

$$e^{i\vartheta} = f(\vartheta) = \cos\vartheta + i\operatorname{sen}\vartheta;$$

Più in generale, dato un numero complesso $z = a + ib$, si definisce l'esponenziale complesso $e : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$e^z = e^{a+ib} = e^a e^{ib} = e^a(\cos b + i\operatorname{sen} b).$$

Osservazione 1.3.3 Si noti che, dalla definizione data, si ha che la funzione $\vartheta \mapsto e^{i\vartheta}$ è 2π-periodica e che per ogni $\vartheta \in \mathbb{R}$ $|e^{i\vartheta}| = 1$. $\diamond$

Definizione 1.3.4 (Forma esponenziale) *Dato un numero complesso $z \in \mathbb{C}$, si chiama forma esponenziale di z la scrittura di z nella forma*

$$z = \varrho e^{i\vartheta},$$

dove ϱ e ϑ sono determinate dalle (1.2).

1.4 Polinomi e radici n-esime

In questa sezione tratteremo i polinomi in campo complesso. Ricordiamo che un polinomio complesso di grado n è una funzione $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definita da

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n, \quad a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}, a_n \neq 0.$$

Ricordiamo anche che un numero complesso z_0 si dice radice del polinomio p se $p(z_0) = 0$; in tal caso il polinomio p è divisibile per $(z - z_0)$ e si potrà scrivere

$$p(z) = (z - z_0)q(z)$$

con q polinomio di grado $n - 1$. Si dice inoltre che z_0 ha molteplicità m se

$$p(z) = (z - z_0)^m q(z)$$

con q polinomio di grado $n - m$ tale che $q(z_0) \neq 0$; in tal caso $p(z)$ è divisibile per $(z - z_0)^m$ ma non per $(z - z_0)^{m+1}$. Conseguenza di questi fatti è che un polinomio di grado n ha al più n radici, contate con le relative molteplicità. In campo complesso vale però anche il viceversa, cioè che le radici sono esattemante n, se contate con le loro molteplicità; vale infatti il seguente Teorema, che non dimostreremo.

Teorema 1.4.1 (Teorema fondamentale dell'algebra) *Ogni polinomio complesso di grado almeno* 1 *ammette una radice complessa.*

Il precedente Teorema ha come immediato corollario il seguente risultato.

Teorema 1.4.2 (Teorema fondamentale dell'algebra) *Ogni polinomio complesso di grado* $n \geq 1$ *ammette* n *radici complesse, se si conta ogni radice con la relativa molteplicità.*

I precedenti Teoremi non danno alcuna informazione su come trovare le radici del polinomio considerato; abbiamo però il seguente Teorema, valido per polinomi a coefficienti reali.

Proposizione 1.4.3 *Se* p *è un polinomio complesso a coefficienti reali, cioè* $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$*, allora* $z_0 \in \mathbb{C}$ *è radice di* p *se e solo se* $\overline{z_0}$ *lo è e in tal caso* z_0 *e* $\overline{z_0}$ *hanno la stessa molteplicità.*

DIM. Basta osservare che, essendo $p(z_0) = 0$, allora

$$\begin{aligned} 0 &= \overline{p(z_0)} = \overline{a_0 + a_1 z_0 \cdots + a_n z_0^n} = \overline{a_0} + \overline{a_1} \cdot \overline{z_0} + \cdots + \overline{a_n} \cdot \overline{z_0}^n \\ &= a_0 + a_1 \overline{z_0} \cdots + a_n \overline{z_0}^n = p(\overline{z_0}). \end{aligned}$$

□

Osservazione 1.4.4 Si noti che, come corollario, si deduce che ogni polinomio reale a coefficienti reali può essere scritto come prodotto di polinomi di grado uno o al massimo due; infatti, visto come polinomio complesso, si ha dal Teorema fondamentale dell'algebra 1.4.2 che

$$p(z) = a_n (z - z_1)^{m_1} \cdot \cdots \cdot (z - z_k)^{m_k} \tag{1.5}$$

con $m_1 + \cdots + m_k = n$; ne deriva che in campo coplesso i fattori primi dei polinomi sono i polinomi di grado uno, nel senso che ogni polinomio si decompone come prodotto di binomi di primo grado (si pensi all'analogia della decomposizione dei numeri interi in fattori primi). Tornando a vedere il polinomio come reale a coefficienti reali, se z_i è reale, allora abbiamo un fattore di grado uno, mentre se z_i è non reale, allora in (1.5) deve comparire anche $\overline{z_i}$ (Proposizione 1.4.3), esiste cioè $j \neq i$ tale che $z_j = \overline{z_i}$ e $m_j = m_i$. Notando poi che

$$(z - z_i)(z - \overline{z_i}) = z^2 - 2\mathrm{Re}(z_i)z + |z_i|^2$$

è un polinomio di secondo grado a coefficienti reali, segue l'osservazione. $\diamond$

Consideriamo ora il problema della radice n–esima di un numero complesso. Dato un numero complesso w, si dice che il numero complesso z è una radice n–esima di w se $z^n = w$. Le radici n–esime sono quindi le soluzioni dell'equazione $z^n - w = 0$, cioè sono le radici del polinomio $p(z) = z^n - w$; quindi, per quanto visto sopra, esistono al più n radici n–esime del numero w. La seguente Proposizione afferma che le radici sono esattamente n.

Proposizione 1.4.5 *Dato il numero complesso $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$, e $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, esistono n radici complesse distinte di w date dalla formula*

$$z_k = \sqrt[n]{|w|}e^{i\vartheta_k}, \quad \textit{con } \vartheta_k = \frac{\arg(w) + 2k\pi}{n}, k = 0, \ldots, n-1.$$

Osservazione 1.4.6 Va osservato che la radice n-esima complessa non definisce una funzione in $\mathbb{C}$, avendo essa più valori; bisogna quindi fare attenzione che il simbolo $\sqrt[n]{w}$ può avere significati differenti, anche nel caso in cui w sia un numero reale, a seconda che si parli di radice reale o radice complessa. $\diamond$

Dim. Scrivendo $z = \varrho e^{i\vartheta}$ e $w = re^{i\phi}$, si nota che $z^n = w$ se e solo se

$$\begin{cases} \varrho^n = r \\ \cos(n\vartheta) = \cos\phi \\ \mathrm{sen}(n\vartheta) = \mathrm{sen}\,\phi; \end{cases}$$

tale sistema ha per soluzioni $\varrho = \sqrt[n]{r}$ (radice reale) e

$$\vartheta_k = \frac{\phi + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{1.6}$$

Chiaramente abbiamo infiniti valori di ϑ_k; notiamo però che due differenti valori di k e h definiscono lo stesso numero complesso, cioè $z_h = z_k$ se ϑ_h e ϑ_k differiscono per un multiplo di 2π, cioè se

$$\vartheta_h = \vartheta_k + 2m\pi;$$

la precedente espressione, usando (1.6), è equivalente a

$$h - k = nm,$$

cioè $z_h = z_k$ se e solo se $h - k$ è divisibile per n, o equivalentemente h e k hanno lo stesso resto nella divisione per n. Siccome i possibili resti della divisione per n sono $0, 1, \ldots, n-1$, la dimostrazione segue. $\square$

1.4.1 Consideriamo il numero $w = 1$, numero di modulo uno e argomento zero; nel caso $n = 2$, cioè nel caso delle radici quadrate, si ottengono i numeri

$$z_k = e^{i\vartheta_k}, \qquad \vartheta_k = k\pi, k = 0, 1$$

cioè i due numeri $z_0 = 1$ e $z_1 = -1$. Per $n = 3$, si ottengono

$$z_k = e^{i\vartheta_k}, \qquad \vartheta_k = \frac{2k\pi}{3}, k = 0, 1, 2$$

cioè i numeri complessi $z_0 = 1$, $z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Analogamente, per $n = 4$

$$z_k = e^{i\vartheta_k}, \qquad \vartheta_k = \frac{k\pi}{2}, k = 0, 1, 2, 3$$

che producono i numeri $z_0 = 1$, $z_1 = i$, $z_2 = -1$ e $z_3 = -i$. In figura sono rappresentate queste radici e quelle relative al caso $n = 5$ e $n = 6$; si noti quindi che il numero 1 si trova sempre tra le radici per ogni ordine (come nel caso reale) ed anche il numero -1 si trova (sempre come nel caso reale) in ogni radice di ordine pari. Si hanno però altre radici a partire dal caso $n = 3$ che si distribuiscono nel piano complesso secondo triangoli equilateri ($n = 3$), quadrati ($n = 4$), pentagoni ($n = 5$) ed esagoni ($n = 6$), avendo sempre (siccome il numero w è reale) due radici coniugate tra loro (si veda figura 1.1).

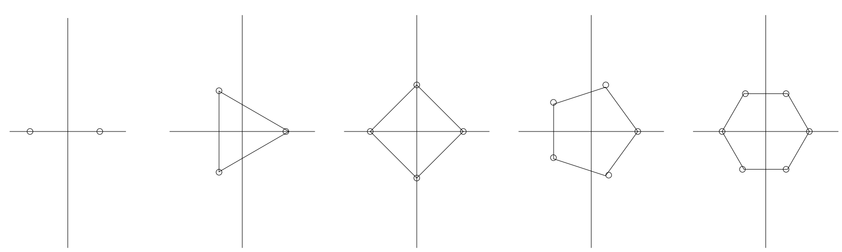

Figura 1.1: Distribuzione nel piano complesso delle radici n–esime di 1, $n = 2, 3, 4, 5, 6$.

1.4.2 Nel caso $w = -1$, il numero di modulo uno e argomento π, si ottiene che nel

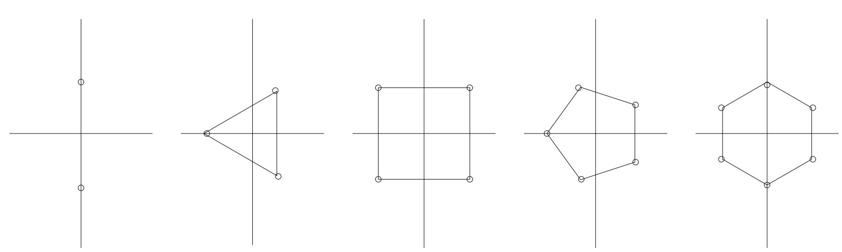

Figura 1.2: Distribuzione nel piano complesso delle radici n–esime di -1, $n = 2, 3, 4, 5, 6$.

caso $n = 2$,

$$z_k = e^{i\vartheta_k}, \qquad \vartheta_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, k = 0, 1$$

cioè i due numeri $z_0 = i$ e $z_1 = -i$. Per $n = 3$, si ottengono

$$z_k = e^{i\vartheta_k}, \qquad \vartheta_k = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, k = 0, 1, 2$$

cioè i numeri complessi $z_0 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_1 = -1$ e $z_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Analogamente, per $n = 4$

$$z_k = e^{i\vartheta_k}, \qquad \vartheta_k = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k = 0, 1, 2, 3$$

che producono i numeri $z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$. Si veda la figura 1.2 per la distribuzione di queste radici e per quelle del caso $n = 5$ e $n = 6$. Come esercizio, si provi a vedere cosa succede nel caso $w = i$ e $w = -i$.

1.4.3

Consideriamo il polinomio reale $p(x) = x^4 + 1$ sappiamo che in $\mathbb{R}$ questo polinomio non ha radici, ci chiediamo se possiamo scrivere $p(x)$ come prodotto di polinomi di secondo ordine. Ora noto che,nel piano complesso $p(z) = z^4 + 1$ ammette 4 radici, che sono per i teoremi precedenti a due a due coniugate, ovvero $p(z) = (z - z_1) \cdot (z - \overline{z_1}) \cdot (z - z_2) \cdot (z - \overline{z_2}) = (z^2 + 2\, z \operatorname{Re} z_1 + |z_1|^2) \cdot (z^2 + 2\, z \operatorname{Re} z_2 + |z_2|^2)$, ora ricordando che $|z_i| = 1$ che $\operatorname{Re} z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $\operatorname{Re} z_2 = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ otteniamo che $x^4 + 1 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2} + 1)$

In maniera analoga possiamo scomporre i polinomi della forma $x^n + a$

Capitolo 2

Laplaciano in coordinate polari

2.1 Introduzione

Come avete precedentemente visto nel corso di Analisi, data una funzione di due variabili $f(x,y) \in C^2(\Omega)$, dove Ω é un aperto di $\mathbb{R}^2$, posso definire il laplaciano di f come $\Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$, ovvero la divergenza del gradiente di f.
Consideriamo il problema:
Data una funzione

$$\begin{aligned} f \ : \ \ & \Omega \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ & (x,y) \to f(x,y) \end{aligned} \tag{2.1}$$

con Ω aperto ed $f \in C^2(\Omega)$ ci domandiamo qual'é il legame tra la funzione

$$\Delta f(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)) \tag{2.2}$$

e la funzione

$$F(\rho,\theta) = f(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)) \tag{2.3}$$

Data $f(x,y)$ possiamo calcolare il laplaciano rispetto a (x,y) e poi fare il cambio di coordinate polari, oppure data $f(x,y)$ fare il cambio di coordinate $(x,y) = (\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta))$ ed otteniamo la funzione $F(\rho,\theta)$ ci chiediamo che trasformazione dovremo applicare ad F per rendere commutativo il diagramma, Chiameremo questa trasformazione **laplaciano in coordinale polari** $\Delta f(\rho,\theta)$.
In altre parole, vogliamo che il seguente diagramma commuti

$$\begin{tikzcd} \text{f(x,y)} \arrow[r, "\text{laplaciano in coord. cartesiane}"] \arrow[d, "\text{coordinate polari}"'] & \Delta f(x,y) \arrow[d, "\text{coordinate polari}"'] \\ F(\rho,\theta) \arrow[r, "\text{laplaciano in coord. polari}"] & \Delta f(\rho,\theta) \end{tikzcd}$$

La risposta é data dalla seguente formula.

$$\Delta f(\rho,\theta) = \frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \tag{2.4}$$

Teorema 2.1.1 *Dimostrazione della formula* (2.4)

Per dimostrare la formula dobbiamo inizialmente capire la relazione che c'é tra le derivate parziali della $f(x, y)$ e le derivate parziali rispetto a ρ e θ della $f(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta))$. Sia

$$v : \begin{array}{l} \Omega \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \to v(x, y) \end{array} \tag{2.5}$$

con Ω *aperto e* $v \in C^2(\Omega)$*, poniamo*

$$V(\rho, \theta) = v(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)) \tag{2.6}$$

Il teorema di derivazione della funzione composta ci dice che

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial \rho} = & \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho} = & \frac{\partial v}{\partial x}\cos(\theta) + \frac{\partial v}{\partial y}\sin(\theta) \\ \frac{\partial V}{\partial \theta} = & \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = & \frac{\partial v}{\partial x}(-\rho\sin(\theta)) + \frac{\partial v}{\partial y}\rho\cos(\theta) \end{cases} \tag{2.7}$$

Nella (2.7) *abbiamo scritto per brevitá* $\frac{\partial v}{\partial x}$ *e* $\frac{\partial v}{\partial y}$ *intendendo* $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x}(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta))$ $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y}(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta))$
Vorremmo ora esprimere le due funzioni $\frac{\partial v}{\partial x}$ *e* $\frac{\partial v}{\partial y}$ *in funzione delle* $\frac{\partial V}{\partial \rho}$ $\frac{\partial V}{\partial \theta}$*, il sistema* (2.7) *ce ne dá la possibilitá, dato che é un sistema lineare in cui il determinante*

$$J(\rho, \theta) = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\rho\sin(\theta) & \rho\cos(\theta) \end{vmatrix} = \rho\cos^2(\theta) + \rho\sin^2(\theta) = \rho \tag{2.8}$$

ed é diverso da 0 *ovunque tranne nell'origine.*
Vogliamo ora invertire il sistema (2.7) *che possiamo scrivere nella forma*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial \rho} \\ \frac{\partial V}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\rho\sin(\theta) & \rho\cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

Siano

$$J_1(\rho, \theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial V}{\partial \rho} & \sin(\theta) \\ \frac{\partial V}{\partial \theta} & \rho\cos(\theta) \end{vmatrix} \tag{2.10}$$

e

$$J_2(\rho, \theta) = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & \frac{\partial V}{\partial \rho} \\ -\rho\sin(\theta) & \frac{\partial V}{\partial \theta} \end{vmatrix} \tag{2.11}$$

risolvendo il sistema lineare abbiamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{J_1(\rho, \theta)}{J(\rho, \theta)} &= \frac{1}{\rho}\Big(\frac{\partial V}{\partial \rho}\rho\cos(\theta) - \frac{\partial V}{\partial \theta}\sin(\theta)\Big) \\ &= \cos(\theta)\frac{\partial V}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\sin(\theta)\frac{\partial V}{\partial \rho} \end{aligned} \tag{2.12}$$

e

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{J_2(\rho,\theta)}{J(\rho,\theta)} = \frac{1}{\rho}\Big(\frac{\partial V}{\partial \theta}\cos(\theta) + \rho\frac{\partial V}{\partial \rho}\sin(\theta)\Big) \tag{2.13}$$
$$= \sin(\theta)\frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\cos(\theta)\frac{\partial V}{\partial \theta}$$

Ovviamente nelle formule (2.12) *e* (2.13) *si intende* $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x}(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta))$ $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y}(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta))$ *ovvero ho calcolato le derivate* $\frac{\partial v}{\partial x}$ *e* $\frac{\partial v}{\partial y}$ *in funzione di* ρ, θ *e le derivate* $\frac{\partial V}{\partial \theta}$ *e* $\frac{\partial V}{\partial \phi}$
Ora ricordo che $\Delta f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y})$
Ora posso applicare in maniera iterativa le formule (2.12) *ed* (2.13) *ovvero:*

(2.14)
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial v}{\partial x}\Big) = \cos(\theta)\frac{\partial}{\partial \rho}\Big(\frac{\partial v}{\partial x}\Big) - \frac{sin(\theta)}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta}\Big(\frac{\partial v}{\partial x}\Big)$$
$$= \cos(\theta)\frac{\partial}{\partial \rho}\Big(\cos(\theta)\frac{\partial V}{\partial \rho} - \sin(\theta)\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \theta}\Big) - \frac{sin(\theta)}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta}\Big(\cos(\theta)\frac{\partial V}{\partial \rho} - \sin(\theta)\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \theta}\Big)$$

Eseguendo le derivazioni nella(2.14) *otteniamo*

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \cos(\theta)\Big[\cos(\theta)\frac{\partial V^2}{\partial \rho^2} - \sin(\theta)\Big(-\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta\,\partial \rho}\Big)\Big] -$$
$$- \frac{\sin(\theta)}{\rho}\Big[-\sin(\theta)\frac{\partial V}{\partial \rho} + \cos(\theta)\frac{\partial^2 V}{\partial \theta\,\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\Big(\cos(\theta)\frac{\partial V}{\partial \theta} + \sin(\theta)\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}\Big)\Big] =$$
$$= \Big(\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2}\Big)cos^2(\theta) + \Big(\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}\Big)\frac{\sin^2(\theta)}{\rho^2}$$
$$- \Big(\frac{\partial^2 V}{\partial \theta\,\partial \rho}\Big)\frac{\sin(\theta)\cos(\theta)}{\rho} +$$
$$+ \Big(\frac{\partial V}{\partial \rho}\Big)\frac{\sin^2(\theta)}{\rho} + \Big(\frac{\partial V}{\partial \theta}\Big)\frac{2\cos(\theta)\sin(\theta)}{\rho^2}$$
(2.15)

Abbiamo utilizzato il Teorema di Schwarz, ovvero $\frac{\partial^2 V}{\partial \rho\,\partial \theta} = \frac{\partial^2 V}{\partial \theta\,\partial \rho}$. *Procedendo in maniera analoga per a* $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ *dato che* $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial v}{\partial y}\Big)$ *utilizziamo iterativamente la* (2.13) *ed otteniamo*

(2.16)
$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial v}{\partial y}\Big) = \sin(\theta)\frac{\partial}{\partial \rho}\Big(\frac{\partial v}{\partial y}\Big) + \frac{cos(\theta)}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta}\Big(\frac{\partial v}{\partial y}\Big)$$
$$= \sin(\theta)\frac{\partial}{\partial \rho}\Big(\sin(\theta)\frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{\cos(\theta)}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \theta}\Big) + \frac{cos(\theta)}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta}\Big(\sin(\theta)\frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{\cos(\theta)}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \theta}\Big)$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= \sin(\theta)\Big[\sin(\theta)\frac{\partial V^2}{\partial \rho^2} + \cos(\theta)\Big(-\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta\, \partial \rho}\Big)\Big] - \\
&+ \frac{\cos(\theta)}{\rho}\Big[+\cos(\theta)\frac{\partial V}{\partial \rho} + \sin(\theta)\frac{\partial^2 V}{\partial \theta\, \partial \rho} + \frac{1}{\rho}\Big(-\sin(\theta)\frac{\partial V}{\partial \theta} + \cos(\theta)\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}\Big)\Big] = \\
&= \Big(\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2}\Big)\sin^2(\theta) + \Big(\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}\Big)\frac{\cos^2(\theta)}{\rho^2} \\
&- \Big(\frac{\partial^2 V}{\partial \theta\, \partial \rho}\Big)2\frac{\sin(\theta)\cos(\theta)}{\rho} + \Big(\frac{\partial V}{\partial \rho}\Big)\frac{\cos^2(\theta)}{\rho} + \\
&+ \Big(\frac{\partial V}{\partial \theta}\Big)\Big(\frac{-2\cos(\theta)\sin(\theta)}{\rho^2}\Big)
\end{aligned}
$$

Sommando le due derivate seconde, e facendo le opportune semplificazioni ottengo la formula

$$
\boxed{\Delta f(\rho, \theta) = \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial f^2}{\partial^2 \theta}}
$$

Questa formula é utile nel caso in cui si voglia risolvere equazione $\Delta(f(x, y) = 0$ *sapendo che la soluzione dipende solo dalla variabile* ρ*, ovvero non dipende da* θ*, in questo caso l'equazione diventa*

$$
\Delta f(\rho, \theta) = \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho} \tag{2.17}
$$

equazione differenziale che studieremo in seguito.

Esercizio

A titolo di esempio, esprimiamo la derivata mista $\frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y}$ *in coordinate polari. Si tratta di applicare le formule* (2.12) *e* (2.13).
applico la (2.12) *alla funzione* $\frac{\partial v}{\partial y}$

$$
\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial v}{\partial y}\Big) = \cos(\theta)\frac{\partial}{\partial \rho}\Big(\frac{\partial v}{\partial y}\Big) - \frac{1}{\rho}\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial \theta}\Big(\frac{\partial v}{\partial y}\Big)
$$

ora utilizzo la (2.13) *ed ottengo*

(2.18)
$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} &= \cos(\theta)\frac{\partial}{\partial \rho}\Big(\sin(\theta)\frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\cos(\theta)\frac{\partial v}{\partial \theta}\Big) - \frac{1}{\rho}\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial \theta}\Big(\sin(\theta)\frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\cos(\theta)\frac{\partial v}{\partial \theta}\Big) \\
&= \Big(\frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2}\Big)\sin(\theta)\cos(\theta) - \Big(\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}\Big)\frac{\sin(\theta)\cos(\theta)}{\rho^2} + \Big(\frac{\partial^2 v}{\partial \rho \partial \theta}\Big)\Big(\frac{\cos^2(\theta)}{\rho} - \frac{\sin^2(\theta)}{\rho}\Big)
\end{aligned}
$$

(2.19)
$$
- \Big(\frac{\partial v}{\partial \rho}\Big)\frac{\sin(\theta)\cos(\theta)}{\rho} + \Big(\frac{\partial v}{\partial \theta}\Big)\Big(\frac{\sin^2(\theta)}{\rho} - \frac{\cos^2(\theta)}{\rho^2}\Big)
$$

Esempi

Verifichiamo direttamente la formula 2.13 che esprime il laplaciano in coordinate polari per la funzione $u(x,y) = x^2 - y^2$
Si ha in questo caso'

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2 \tag{2.20}$$

e quindi

$$\Delta u(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0 \tag{2.21}$$

Perció é anche

$$\Delta u(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)) = 0 \tag{2.22}$$

Nel nostro caso si ha anche

$$U(\rho,\theta) = \rho^2\cos^2(\theta) - \rho^2\sin^2(\theta) = \rho^2(1 - 2\sin^2(\theta)) \tag{2.23}$$

ed ottengo

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = 2\rho(1 - 2\sin^2(\theta)) \tag{2.24}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} = 2(1 - 2\sin^2(\theta)) \tag{2.25}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = \rho^2(-4\sin(\theta)\cos(\theta)) \tag{2.26}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = -4\rho^2(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) \tag{2.27}$$

utilizzando queste relazioni posso calcolare il laplaciano in coordinate polari

$$\begin{aligned}\Delta f(\rho,\theta) = \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial f^2}{\partial \theta^2} &= 2(1 - 2\sin^2(\theta)) + 2(1 - 2\sin^2(\theta)) - 4(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) \\ &= 4 - 8\sin^2(\theta) - 4(1 - 2\sin^2(\theta)) = 0 \end{aligned} \tag{2.28}$$

Se $u(x,y)$ *verifica* $\Delta u = 0$, *diremo che* $u(x,y)$ *é una funzione armonica.*
Verifichiamo la formula della derivata mista per la funzione $u(x,y) = x^2 - y^2$.
Si ha

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \textit{e quindi} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$$

Verifichiamo che

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)) = 0 \tag{2.29}$$

verifichiamola.
per la precedente formula si ha

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \rho \partial \theta} = 2\rho(-4\sin(\theta)\cos(\theta)) = -8\rho\sin(\theta)\cos(\theta) \tag{2.30}$$

La formula nel nostro caso diviene, tenendo conto delle

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} &= (2 - 4\sin^2(\theta))\sin(\theta)\cos(\theta) + 4\rho^2(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta))\frac{\sin(\theta)\cos(\theta)}{\rho^2} + \\ &+8\rho\sin(\theta)\cos(\theta)(\frac{\cos^2(\theta)}{\rho} - \frac{\sin^2(\theta)}{\rho}) + (2\rho - 4\rho\sin^2(\theta))(-\frac{\sin(\theta)\cos(\theta)}{\rho}) \\ &- 4\rho^2\sin(\theta)\cos(\theta)(\frac{\sin^2(\theta) - \cos^2(\theta)}{\rho^2}) = 0\end{aligned} \tag{2.31}$$

Osservazione *É chiaro che le formule usate iterativamente danno la possibilitá di esprimere tutte le derivate fino all'ordine k di una funzione $C^k(A)$ in termini di $U(\rho, \theta)$ definita dalla, in questo modo possiamo esprimere qualsiasi operatore differenziale in coordinate polari.*

Generalizzazione nel caso delle n variabili

Quanto dimostrato nelle pagine precedenti per una funzione $u(x, y)$ di due variabili può essere facilmente generalizzato al caso di n variabili nel modo seguente. Se $v \in C^k(A)$ con $A \subset R^n$ e quindi

$$\begin{aligned}&v\colon A \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} \\ &\overline{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mapsto v(\overline{x}) = v(x_1, x_2, \cdots, x_n)\end{aligned}$$

possiamo considerare un cambiamento di variabili del tipo $x_i = x_i(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ con $(t_1, t_2 \cdots, t_n) \in B \subset \mathbb{R}^n$, e la funzione composta

$$V(t_1, t_2, \cdots, t_n) = v(x_1(t_1, t_2 \cdots, t_n) \cdots, x_n(t_1, t_2 \cdots, t_n)) \tag{2.32}$$

Analogamente a quanto abbiano fatto per le coordinate polari.
Il teorema di derivazione di funzione composta

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t_1} &= \frac{\partial v}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_1} \cdots + \frac{\partial v}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_1} \\ \frac{\partial V}{\partial t_2} &= \frac{\partial v}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial v}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_2} \cdots + \frac{\partial v}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_2} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial V}{\partial t_n} &= \frac{\partial v}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_n} + \frac{\partial v}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_n} \cdots + \frac{\partial v}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_n} \end{cases} \tag{2.33}$$

La formula ... corrisponde alla formula ..., anche qui si scrive per brevità $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ intendendo $\frac{\partial v}{\partial x_i}(x_1(t_1, t_2. \cdots, t_n), \cdots, x_n(t_1, t_2. \cdots, t_n)$ per ogni $i = 1, 2 \cdots, n$.

In questo caso vorremmo esprimere le n funzioni $\frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial v}{\partial x_n}$ *in funzione delle* $\frac{\partial V}{\partial t_1}, \frac{\partial V}{\partial t_2}, \cdots, \frac{\partial V}{\partial t_n}$ *Il sistema ... é un sistema lineare il cui determinante detto* **Jacobiano della trasformazione** *è dato da*

$$J(t_1, t_2. \cdots, t_n) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1}, & \frac{\partial x_2}{\partial t_1}, & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial t_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_2}, & \frac{\partial x_2}{\partial t_2}, & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial t_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_n}, & \frac{\partial x_2}{\partial t_n}, & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial t_n} \end{vmatrix} \tag{2.34}$$

e si suppone che sia diverso da zero ovunque, questi ci permette di invertire il sistema .... e di esprimere le $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ *come espressione delle* $\frac{\partial V}{\partial t_j}$ *e delle* $\frac{\partial x}{\partial t_j}$, $j = 1, \cdots, n$. *Analogamente a quanto fatto per il laplaciano in coordinate polari, data una funzione* $u \in C^k(A)$ *possiamo iterare il procedimento e calcolare le derivate fino all̀ ordine* k *della funzione* u *rispetto alle variabili* k *come funzione delle derivate parziali di* $V(t_1, t_2. \cdots, t_n)$ *rispetto alle* t_j *e delle derivate della* x *rispetto alle* t_j .

Cambiamenti di coordinate utili

Consideriamo il cambiamento di variabili in dimensione tre, un cambiamento utile può essere quello in **coordinate sferiche**, *vogliamo esprimere il laplaciano in queste nuove coordinate.*
chiaramente il laplaciano in coordinare cartesiane è:

$$\Delta u(x, y, z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Ricordiamo che le che le coordinate sferiche sono:

$$\begin{cases} x = & (\rho \sin(\phi)) \cos(\theta) \quad 0 < \rho < +\infty \\ y = & (\rho \sin(\phi)) \sin(\theta) \quad 0 \leq \theta < 2\pi \\ z = & \rho \cos(\phi) \quad\quad\quad 0 \leq \phi \leq \pi \end{cases} \tag{2.35}$$

Possiamo calcolare il determinante della matrice jacobiana

$$J(\rho, \phi, \theta) = \begin{vmatrix} \sin(\phi)\cos(\theta), & \sin(\phi)\sin(\theta), & \cos(\phi) \\ \rho\cos(\phi)\cos(\theta), & \rho\cos(\phi)\sin(\theta), & -\rho\sin(\phi) \\ -\rho\sin(\phi)\sin(\theta), & \rho\sin(\phi)\cos(\theta), & 0 \end{vmatrix} \tag{2.36}$$

Sviluppando il determinante otteniamo:

$$J(\rho, \phi, \theta) = \rho^2 \sin(\phi) \tag{2.37}$$

questa espressione è sempre positiva quando $\rho > 0$ *e* $0 < \theta < \pi$, *se chiamiamo* $U(\rho, \theta, \phi)$ *la funzione* $u(x, y, z)$ *composta con la 2.35 possiamo calcolare, analogamente a quanto fatto in coordinate polari, le varie derivate* $\frac{\partial u}{\partial x}$ $\frac{\partial u}{\partial y}$ $\frac{\partial u}{\partial z}$ *rispetto a* $\frac{\partial U}{\partial \rho}$ $\frac{\partial U}{\partial \theta}$ $\frac{\partial U}{\partial \phi}$ *e successivamente calcolare le derivate seconde* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ *in funzione delle derivate rispetto a* $\frac{\partial U}{\partial \rho}$ $\frac{\partial U}{\partial \theta}$ $\frac{\partial U}{\partial \phi}$ $\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2}$ $\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}$ $\frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2}$ *Non eseguiamo esplicitamente i calcoli, abbiamo come risultato*

$$\boxed{\Delta U(\rho,\theta,\phi)=\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2}+\frac{2}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\Big(\frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2}+\cot(\phi)\frac{\partial U}{\partial \phi}+\csc^2(\phi)\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\Big)}$$

Se la U dipende solo da ρ, otteniamo

$$\boxed{\Delta U(\rho)=\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2}+\frac{2}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \rho}}$$

In maniera del tutto analoga possiamo calcolare il laplaciano in **coordinate cilindriche**.

$$\begin{cases} x = & \rho\cos(\theta) \quad 0<\rho<+\infty \\ y = & \rho\sin(\theta) \quad 0\leq\theta<2\pi \\ z = & z \quad z\in\mathbb{R} \end{cases} \tag{2.38}$$

Il laplaciano diventa

$$\boxed{\Delta U(\rho,\theta,z)=\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}}$$

Capitolo 3

Derivazione sotto il segno di integrale

3.1 Introduzione

Sia $f(x,y)$ una funzione definita in $Q = [a,b] \times [c,d]$. Se f è continua su Q si puó considerare l'integrale

$$\phi(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy \;\; x \in [c,d] \tag{3.1}$$

ovvero ad x fissato calcoliamo l'area della sezione $f(x,y)$ dove y varia tra gli estremi c d, si possono dimostrare i seguenti teoremi.

Teorema 3.1.1 *Se $f(x,y)$ é continua nel rettangolo $Q = [a,b] \times [c,d]$, allora la funzione $\phi(x)$ definita da (3.1) é una funzione continua su tutto $[a,b]$*

Teorema 3.1.2 *Se $f(x,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ sono funzioni continue nel rettangolo $Q = [a,b] \times [c,d]$, allora la funzione $\phi(x)$ definita in (3.1) é derivabile e vale la formula $\phi'(x) = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy \; \forall x \in [a,b]$*

Il precedente teorema 3.1.2 esprime il cosiddetto **teorema di derivazione sotto il segno di integrale**.

Questo teorema si dimostra facilmente nel caso in cui la $f(x,y)$ é prodotto di due funzioni $f(x,y) = a(x)b(y)$ .Noi non dimostreremo i due teoremi precedenti, ci limiteremo ad illustrare il teorema 3.1.2 con un esempio.

Sia $f(x,y) = x^3y + x^2y^2 + y^3$ e sia ad esempio $Q = [0,1] \times [0,1]$,in questo caso si ha

$$\phi(x) = \int_0^1 f(x,y)\,dy = \int_0^1 x^3y + x^2y^2 + y^3\,dy = \tag{3.2}$$

$$= \left[x^3\frac{y^2}{2} + x^2\frac{y^3}{3} + \frac{1}{4}y^4\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4} \tag{3.3}$$

e quindi otteniamo

$$\phi'(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}x \tag{3.4}$$

Se applichiamo la formula otteniamo che

$$\begin{aligned}\phi(x) = \int_0^1 f(x,y)\,dy = \int_0^1 3x^2y + 2xy^2\,dy = \\ = \left[\frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{2}{3}xy^3\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}x\end{aligned} \tag{3.5}$$

le due espressioni 3.4 3.5 forniscono la stessa espressione per $\phi'(x)$ e quindi, in questo caso specifico, il teorema 3.1.2 é verificato con un calcolo diretto.
I teoremi 3.1.1 e 3.1.2 hanno ovvie generalizzazioni al caso di funzioni di piú variabili. Si puó, ad esempio , considerare la funzione

$$\phi(x,y) = \int_c^d f(x,y,z)\,dz \tag{3.6}$$

dove la funzione $f(x,y,z)$ é definita e continua nel parallelepipedo $Q = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times [c,d]$, con $a_1 \leq b_1$, $a_2 \leq b_2$, $c \leq d$. In questo caso si puó dimostrare che la funzione $\phi(x,y)$ definito dalla 3.6 é continua nel rettangolo $Q = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2]$, questo teorema é l'analogo del teorema 3.1.1. Se inoltre supponiamo che sia la $f(x,y,z)$ che le $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)$ sono funzioni sono continue nel parallelepipedo $Q = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times [c,d]$, allora la funzione $\phi(x,y)$ definita dalla 3.6 é derivabile parzialmente rispetto ad x e y e si ha

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y) = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\,dz \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\,dz \tag{3.8}$$

le 3.7 e 3.8 sono l'equivalente del teorema 3.1.2.

3.2 Generalizzazioni ulteriori (estremi variabili)

Supponiamo che $f(x,y)$ e $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ siano definite e continue in $Q = [a,b] \times [c,d]$ Se α $\beta \in [c,d]$ possiamo considerare la funzione

$$\Phi(x,\alpha,\beta) = \int_\alpha^\beta f(x,y)\,dy \tag{3.9}$$

Φ é una funzione di tre variabili definita nel parallelepipedo $[a,b]\times[c,d]\times[c,d]$ Per la funzione Φ valgono.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,\alpha,\beta)=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy \tag{3.10}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}(x,\alpha,\beta)=-f(x,\alpha) \tag{3.11}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \beta}(x,\alpha,\beta)=f(x,\beta) \tag{3.12}$$

La formula 3.10 discende dal teorema 3.1.2 mentre le 3.11 e 3.12 sono conseguenza del teorema fondamentale del calcolo integrale. Verifichiamo la 3.12. calcoliamo

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\Phi(x,\alpha,\beta+\epsilon)-\Phi(x,\alpha,\beta)}{\epsilon}=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\int_{\alpha}^{\beta+\epsilon}f(x,y)\,dy-\int_{\alpha}^{\beta}f(x,y)\,dy}{\epsilon}$$

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\int_{\beta}^{\beta+\epsilon}f(x,y)\,dy}{\epsilon}=\lim_{\epsilon\to 0}f(x,\overline{y_\epsilon})\ \text{ dove } \overline{y_\epsilon}\in[\beta,\beta+\epsilon] \text{ punto opportuno}$$

e per la continuitá della $f(x,y)$ abbiamo la tesi. Per la 3.11 si procede in modo analogo.
Inoltre notiamo che, se supponiamo continue le funzioni $f(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ in $Q=[a,b]\times[c,d]$ le formule 3.10, 3.11, 3.12 ci dicono che anche le funzioni $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ $\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}$ $\frac{\partial \Phi}{\partial \beta}$ sono funzioni continue, l' importante conseguenza di questo fatto é il seguente teorema.

Teorema 3.2.1 *Supponiamo che le funzioni $f(x,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ siano continue nel rettangolo $Q=[\overline{a},b]\times[\overline{c},d]$ e le due funzioni $\alpha(x):[\overline{a},b]\to[\overline{c},d]$ e $\beta(x):[\overline{a},b]\to[\overline{c},d]$ siano derivabili in $[\overline{a},b]$, allora la funzione*

$$F(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}f(x,y)\,dy \tag{3.13}$$

é derivabile in $[\overline{a},b]$ e si ha

$$F'(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}f'(x,y)\,dy-f(x,\alpha(x))\alpha'(x)+f(x,\beta(x))\beta'(x) \tag{3.14}$$

Dimostrazione.
La formula 3.14 si dimostra osservando che la funzione

$$F(x))=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}f(x,y)\,dy$$

é una funzione composta: infatti ponendo

$$x = x(t) = t \qquad \alpha = \alpha(t) \qquad \beta = \beta(t) \qquad \textit{con } a \le t \le b \tag{3.15}$$

e componendo con la

$$\Phi(x.\alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y)\, dy$$

definita nella 3.6 si ottiene

$$F(t) = \Phi(x(t), \alpha(t), \beta(t)) = \int_{\alpha(t}^{\beta(t)} f(t, y)\, dy \tag{3.16}$$

Deriviamo ora la 3.16, ricordando il teorema di derivazione composta si ha per le 3.10,3.11,3.12,3.15,

$$\begin{aligned} F'(t) = &\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x(t), \alpha(t), \beta(t))x'(t)+ \\ &+\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}(x(t), \alpha(t), \beta(t))\alpha'(t) + \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}(x(t), \alpha(t), \beta(t))\beta'(t) \\ &= \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial f}{\partial x} f(t, y)\, dy \cdot 1 - f(t, \alpha(t))\alpha'(t) + f(t, \beta(t))\beta'(t) \end{aligned} \tag{3.17}$$

Chiaramente la 3.17 coincide con la 3.16 a parte il nome della variabile utilizzata. Questa formula ci permette di calcolare la derivata della 3.16 senza dover calcolare esplicitamente l'integrale $F(t)$.

Primo esempi

Sia

(3.18)

$$F(x) = \int_{x^2}^{3x} e^{-(x+y)}\, dy = -\Big[e^{-(x+y)}\Big]_{x^2}^{3x} = -\Big(e^{-(x+3x)} - e^{-(x+x^2)}\Big) = e^{-(x+x^2)} - e^{-4x}$$

derivando otteniamo

$$F'(x) = e^{-(x+x^2)}(-1-2x) - e^{-4x}(-4) = -(1+2x)e^{-(x+x^2)} + 4e^{-4x} \tag{3.19}$$

Utilizziamo ora la formula 3.14, con $f(x, y) = e^{-(x+y)}$, $\alpha(x) = x^2$ e $\beta(x) = 3x$, ottengo:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \textstyle\int_{x^2}^{3x} -e^{-(x+y)}\, dy - e^{-(x+x^2)}2x + e^{-(x+3x)}3 \\ &= \Big[e^{-(x+y)}\Big]_{y=x^2}^{y=3x} - e^{-(x+x^2)}(2x) + 3e^{-(x+3x)} = \\ &= e^{-(x+3x)} - e^{-(x+x^2)} - 2xe^{-(x+x^2)} + e^{-(x+3x)} = \\ &= 4e^{-4x} - (2x+1)e^{-(x+x^2)} \end{aligned} \tag{3.20}$$

La 3.19 e 3.20 danno lo stesso risultato per $F'(x)$ e quindi la formula 3.14 del teorema 3.2.1 é verificata con calcoli diretti.

Secondo esempio
Si consideri la funzione

(3.21)
$$F(x) = \int_{x^2}^{3x} e^{-(x+y)^2}\, dy = -\Big[e^{-(x+y)}\Big]_{x^2}^{3x} = -\Big(e^{-(x+3x)} - e^{-(x+x^2)}\Big) = e^{-(x+x^2)} - e^{-4x}$$

calcolare $F'(x)$. Si puó dimostrare che in questo caso, non é possibile esplicitare l'integrale mediante formule elementari, infatti per un noto teorema non é possibile calcolare la primitiva della funzione $e^{-(x+y)^2}$ in termini di funzioni elementari. Non resta che applicare la formula 3.14 per calcolare $F'(x)$. Applichiamo il teorema 3.2.1 con $f(x,y) = e^{-(x+y)^2}$, $\alpha(x) = x^2$, $\beta(x) = 3x$ si ottiene

$$F'(x) = \int_{x^2}^{3x} e^{-(x+y)^2}(-2(x+y))\, dy - 2ye^{-(x+x^2)^2} + 3e^{-(x+3x)^2} \tag{3.22}$$

possiamo calcolare l'integrale esplicitamente ed otteniamo:

(3.23)
$$\begin{aligned} F'(x) &= \Big[e^{-(x+y)^2}\Big]_{y=x^2}^{y=3x} - 2xe^{-(x+x^2)^2} + 3e^{-(4x)^2} \\ &= e^{-(x+3x)^2} - e^{-(x+x^2)^2} - 2xe^{-(x+x^2)^2} + 3e^{-(4x)^2} = 4e^{-16x^2} - (1+2x)e^{(x+x^2)^2} \end{aligned}$$

Estremi variabili dipendenti da piú variabili
I precedenti teoremi 3.1.1 3.1.2 possono essere estesi al caso in cui si sostituisca al punto $x \in \mathbb{R}$ un punto $\overline{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. In questo caso si parla di applicazioni $f(\overline{x}, y) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n, y)$ definite in parallelepipedi di $\mathbb{R}^{n+1}$, cioé con

$$\begin{cases} a_i \le x_i \le b_i & per\ i = 1, 2, \cdots, n \\ c \le y \le d \end{cases} \tag{3.24}$$

L'analogo della 3.1.1 diventa

$$\phi(\overline{x}) = \phi(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \int_c^d f(x_1, x_2, \cdots, x_n, y)\, dy = \int_c^d f(\overline{x}, y) dy \tag{3.25}$$

Chiamando $Q = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^n \;\; a_1 \le x_i \le b_i,\ con,\ i = 1, 2, \cdots, n\}$ e naturalmente $a_i \le b_i$ costanti reali, si possono dimostrare i risultati seguenti, analogamente ai teoremi 3.1.1, 3.1.2 si ha in riferimento alla formula 3.25

Teorema 3.2.2 *T_1': Se f $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, ... $\frac{\partial f}{\partial x_n}$ sono continue in Q, allora $\phi(\overline{x}) \in C^1(Q)$ e si ha:*

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, x_2, \cdots, x_n, y)\, dy \quad j = 1, 2, , \cdots, n \tag{3.26}$$

Teorema 3.2.3 *T_2': Se f $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, ... $\frac{\partial f}{\partial x_n}$ sono continue in Q, allora $\phi(\overline{x}) \in C^1(\mathbb{R})$ e si ha*

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x_1, x_2, \cdots x_n) = \int_c^d \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x_1, x_2, \cdots, x_n, y)\, dy \quad j = 1, 2, \cdots, n \tag{3.27}$$

Teorema 3.2.4 *T_3': Se f $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, ... $\frac{\partial f}{\partial x_n}$ sono continue in Q e $\alpha(\overline{x}) = \alpha(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $\beta(\overline{x}) = \beta(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ sono funzioni definite in Q a valori in $[\overline{c}, d]$e sono parzialmente derivabili, la funzione*

$$\begin{aligned} F(\overline{x}) &= F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \int_{\alpha(\overline{x})}^{\beta(\overline{x})} f(\overline{x}, y)dy \\ &= \int_{\alpha(x_1, x_2, \cdots, x_n)}^{\beta(x_1, x_2, \cdots, x_n)} f(x_1, x_2, \cdots, x_n, y)dy \end{aligned} \tag{3.28}$$

é derivabile parzialmente rispetto ad $x_1, x_2, \cdots, x_n$ e vale

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(\overline{x}) = \int_{\alpha(\overline{x})}^{\beta(\overline{x})} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\overline{x}, y)dy \ \ - f(\overline{x}, \alpha(\overline{x}))\frac{\partial \alpha}{\partial x_j}(\overline{x}) + f(\overline{x}, \beta(\overline{x}))\frac{\partial \beta}{\partial x_j}(\overline{x}) \tag{3.29}$$

Capitolo 4

Equazioni differenziali

4.1 Introduzione

La risoluzione di numerosi problemi della matematica, della fisica e delle scienze applicate consiste nel determinare una funzione incognita $x(t)$ in un opportuno insieme aperto $A \subset \mathbb{R}$ che verifiche una equazione del tipo.

$$F(t, x(t), x'(t), \cdots, x^{(n)}(t)) = 0 \tag{4.1}$$

dove la funzione $x(t)$ compare insieme alle sue derivate sino all'ordine n. Una equazione di questo tipo viene detta **equazione differenziale di ordine n** *Se l' equazione si scrive nella forma:*

$$x^{(n)}(t) = F(t, x(t), x'(t), \cdots, x^{(n-1)}(t)) \tag{4.2}$$

diremo che l' equazione differenziale di ordine **n** *è in* **forma normale**.
Risolvere èquazione 4.1 significa determinare tutte le funzioni $x(t)$ che la soddisfano: l' incognita del problema è una funzione, a differenza delle equazioni algebriche dove l' incognita è un numero.
Da un punto di vista matematico, l' equazione differenziale più semplice è l' equazione del primo ordine.

$$x'(t) = 0 \tag{4.3}$$

dove si chiede di determinare tutte le funzioni $x(t)$ che hanno derivata nulla in ogni punto. Sappiamo dal calcolo differenziale che la 4.3 equivale a dire che $x(t)$ è una funzione costante: pertanto, le soluzioni dell'equazione differenziale 4.3 sono le seguenti

$$x(t) = C, \qquad C \text{ costante arbitraria.} \tag{4.4}$$

L' equazione differenziale ha infinite soluzioni, e ogni soluzione è del tipo descritto dalla 4.4: diciamo quindi che la formula 4.4 indica la soluzione generale dell' equazione 4.3.

L' esempio 4.3, pur nella sua semplicità, presenta già un fenomeno tipico delle equazioni differenziali. Infatti come vedremo,
una equazione differenziale, ha in generale, infinite soluzioni.
Equazioni differenziali appena più generali della 4.3 sono state giá incontrate nella teoria dell' integrazione: in effetti ogni volta che si calcolano le primitive di una funzione continua, si risolve implicitamente uǹ equazione differenziale. Ad esempio, risolvere l' equazione differenziale

$$x'(t) = t + \cos(t)$$

significa esattamente determinare tutte le primitive della funzione al secondo membro. In questi esempio, sappiamo che la soluzione generale é data da

$$x(t) = \frac{t^2}{2} + \sin(t) + C, \qquad C \text{ costante arbitraria.}$$

Naturalmente non tutte le equazioni differenziali sono di tipo così semplice. Consideriamo l' equazione

$$(y'(t))^2 + (y(t))^2 = -1 \tag{4.5}$$

È evidente che questa equazione non ammette soluzioni, dato che il termine a sinistra è somma di due quadrati e dunque quantità positiva, mentre a destra abbiamo -1*. Consideriamo il seguente esempio.*

$$x'(t) = e^{x(t)} + t^2 \tag{4.6}$$

è una equazione del primo ordine in forma normale, purtroppo le soluzioni non si riescono a determinare in forma esplicita, in realtà non abbiamo ancora uno strumento teorico che ci permette di garantire l' esistenza di soluzioni per l' equazione 4.6, possiamo ricavare solo delle informazioni qualitative sulla ipotetica soluzione, ad esempio, essendo il membro a destra positivo, possiamo dire che la soluzione sarà crescente.
Noi focalizzeremo l' attenzione sulle equazioni differenziali del secondo ordine in forma normale. In particolare, il paradigma fondamentale per le equazioni differenziali del secondo ordine è dato dalla legge di Newton

$$mx''(t) = F(t, x(t), x'(t)) \tag{4.7}$$

dove $x(t)$ *indica la posizione di una particella al tempo* t *su cui agisce una forza* F*, il moto si svolge in una unica direzione* x*, mentre in generale, nel caso di una particella che si muova nello spazio la* $x(t)$ *è un vettore di tre componenti, ed anche la* F *lo é. Chiaramente la* $x'(t)$ *e la* $x''(t)$ *rappresentano la velocità e l' accelerazione istantanea della particella*
La 4.7 (che è semplicemente una maniera più dettagliata di scrivere la formula $F = ma$*) può assumere varie forme a seconda del problema considerato (cioè a seconda di come la forza esterna dipende dal tempo, dalla posizione e dalla velocità della particella), dando origine ad un gran numero di equazioni differenziali anche molto diverse tra loro.*

Esempio 4.1.1 [caduta di un grave senza attrito] Consideriamo un corpo di massa che cade verso il basso (lungo una retta verticale che orientiamo col verso positivo in alto) a causa della gravità, e indichiamo con $x(t)$ la sua altezza rispetto al suolo (e quindi la sua posizione) al tempo t. Se g denota l' accelerazione di gravità, la forza F che agisce sul corpo (trascurando l' attrito dell' aria) é pari a $-mg$ (il segno meno indica che la forza è diretta verso il basso, cioè nel verso negativo della retta orientata). In queste ipotesi, la 4.7 si riduce a $mx'' = -mg$ ovvero

$$x'' = -g, \qquad \text{g costante} \tag{4.8}$$

$\diamond$

La 4.8 è un esempio molto semplice di equazione differenziale, la funzione $x(t)$ è tale che la sua derivata seconda rispetto a t è costantemente uguale a $-g$.
Risolvere la 4.8 significa determinare tutte le possibili funzioni $x(t)$ che hanno questa proprietà. Integrando 4.8 rispetto a t, otteniamo

$$x'(t) = -gt + A$$

dove A è una costante qualsiasi. Integrando ancora una volta otteniamo

$$x(t) = -\frac{g}{2}t^2 + At + B \qquad A \text{ e } B \text{ costanti arbitrarie} \tag{4.9}$$

La formula 4.9 rappresenta quindi la soluzione generale delĺ equazione differenziale 4.8. Per ogni possibile scelta delle costanti A e B (ade esempio, $A = 100$ e $B = 5$) si ottiene una soluzione particolare dell' equazione differenziale (nel nostro esempio $x(t) = -\frac{g}{2}t^2 + 100t + 5$).

Osservazione 4.1.2 *Se ripensiamo al significato fisico dell' equazione differenziale 4.8. Il fatto che la soluzione generale dipenda da due parametri liberi A e B non è affatto strano. Infatti la 4.8 rappresenta per così dire la legge generale cui obbedisce un qualsiasi corpo a caduta verticale: è chiaro però che il moto effettivo di un corpo che cadi dipenderà , oltre che alla legge di Newton, anche dalla sua posizione e dalla sua velocità iniziale. È nell' esempio, è proprio il significato delle costanti A e B che compaiono nella soluzione generale 4.9, infatti, si verifica subito che se $x(t)$ è la soluzione generale della 4.9 si ha che $x(0) = B$ e $x'(0) = A$.*

Più in generale, dato che uǹ equazione in forma normale di ordine $n \geq 1$ si può considerare il cosiddetto problema di Cauchy associato all' equazione differenziale, cioè il sistema

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) & = F(t, x(t), x'(t), \cdots, x^{n-1}(t)) \\ x(t_0) & = a_0 \\ x'(t_0) & = a_1 \\ \vdots & \\ x^{(n-1)}(t_0) & = a_{n-1} \end{cases} \tag{4.10}$$

nel quale la prima equazione è l' equazione differenziale vera e propria, mentre le altre sono condizioni aggiuntive, dette condizioni iniziali, nelle quali i numeri $t_0, a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ *sono assegnati. Il significato è il seguente: determinare tra tutte le soluzioni la funzione* $x(t)$ *che verificano l' equazione differenziale, quella , o tutte quelle, che verificano anche le* n *condizioni iniziali nel punto* t_0 .
Si noti che le condizioni iniziali consistono nel prescrivere i valori della funzione $x(t)$ *e di tutte le derivate fino all' ordine* $n-1$, *in uno stesso punto* t_0.
Come vedremo in seguito, in alcuni casi, sotto opportune ipotesi, il problema di Cauchy 4.10 ammette una unica soluzione in un opportuno intorno del punto t_0 , *diremo in questo caso che per il problema di Cauchy in questione c'é esistenza ed unicità della soluzione .*

Esempio 4.1.3 [Caduta di un grave] Un corpo inizialmente fermo cade dall' altezza h. Trascurando l' attrito dell' aria, dopo quanto tempo il corpo arriverà a terra ?
$\diamond$

Conosciamo già l' equazione differenziale 4.8 che governa la caduta del corpo, ed è naturale scegliere l' origine dei tempi in modo che l'istante t_0 *in cui il corpo inizia a cadere sia proprio* $t_0 = 0$. *Pertanto, il problema di Cauchy che dobbiamo impostare è il seguente*

$$\left\{ \begin{array}{ll} x^2(t) & = -g \\ x(0) & = h \\ x'(0) & = 0 \end{array} \right. \tag{4.11}$$

La prima condizione iniziale $x(0) = h$ *esprime il fatto che il corpo, al tempo* $t = 0$ *si trova ad altezza* h, *la seconda invece esprime il fatto che il corpo è inizialmente fermo, cioè la sua velocità iniziale* $x'(0)$ *è uguale a zero.*
Sappiamo dalla 4.9 che la soluzione generale dell' equazione differenziale è

$$x(t) = -\frac{g}{2}t^2 + At + B \qquad \textit{A e B costanti arbitrarie}$$

Per risolvere il problema di Cauchy, basta quindi determinare le costanti A *e* B *in modo di verificare le condizioni iniziali. La derivata* $x'(0) = 0$

$$\left\{ \begin{array}{ll} x(0) & = h \\ x'(0) & = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ll} B & = h \\ A & = 0 \end{array} \right.$$

La soluzione del problema di Cauchy è dunque

$$x(t) = -\frac{g}{2}t^2 + h \tag{4.12}$$

e per capire quando il corpo toccherà terra basterà risolvere l ́ equazione $x(t) = 0$ *che fornisce* $t = \sqrt{2h/g}$. *Ad esempio se l'altezza iniziale* h *è pari a 100 metri, ricordando che* $g = 9,8\, m/s^2$, *si trova che il tempo di caduta è di circa* $4,5.$ *secondi*
Altri esempi notevoli della fisica.

Esempio 4.1.4 [Caduta con attrito] Consideriamo ancora il problema della caduta di un grave tenendo conto, questa volta, dell' attrito dell' aria. Questo può essere fatto secondo modelli fisico-matematici diversi (più o meno realistici a seconda delle condizioni) , il modello più semplice è quello in cui si presuppone che la forza di attrito, che si oppone al moto del corpo tendendo a frenarlo, sia direttamente proporzionale alla velocità $x'(t)$ del corpo. Indicando con $\mu \geq 0$ il coefficiente di proporzionalità (coefficiente di attrito), la legge di Newton 4.7 prende la forma

$$mx''(t) = -\mu x'(t) - mg$$

(il secondo termine ha segno negativo, in quanto la forza di attrito agisce in direzione opposta a quella del moto) e quindi $c = \mu/m$ si trova l' equazione differenziale

$$x''(t) + cx'(t) = -g$$

Il problema di Cauchy corrispondente (con tempo iniziale t_0) è quindi

$$\begin{cases} x''(t) + cx'(t) & = -g \\ x(0) & = x_0 \\ x'(0) & = v_0 \end{cases} \tag{4.13}$$

◇

Esempio 4.1.5 [decadimento radioattivo] Data una certa quantità di materiale radioattiva, i suoi atomi emettono particelle subendo un processo si decadimento. Se $x(t)$ indica il numero di atomi che al tempo t non sono ancora decaduti, l' equazione differenziale che governa questo processo

$$\begin{cases} x'(t) & = -\lambda x(t) \\ x(0) & = N_0 \end{cases}$$

◇

Esempio 4.1.6 [oscillatore smorzato] Una massa m é attaccata all'estremitá di una molla, mentre l' altra estremitá della molla é fissa. Allungando o accorciando la molla, la massa m si puó spostare lungo una retta: indichiamo con $x(t)$ la posizione della massa al tempo t, in modo che l' origine $x = 0$ indichi la posizione di equilibrio in cui la molla ha la sua lunghezza naturale. Quando la molla é allungata o accorciata, essa esercita una forza di richiamo pari a $-k\,x(t)$ dove k é la costante di elasticitá della molla (il segno negativo indica che la forza é diretta verso la posizione di equilibrio). l' equazione differenziale che governa il moto della massa (lasciata libera di muoversi lungo la retta) e si ottiene dalla 4.7 ponendo $F = -kx(t)$ ed é quindi

$$mx''(t) = -kx(t)$$

◇

Se poi il moto della massa é smorzato da una forza di attrito $-\mu x'(t)$ (come nel caso della caduta di un grave), l' equazione diventa

$$mx''(t) = -kx(t) - \mu x'(t)$$

Infine, se si esercita artificialmente sulla massa m una forza esterna $f(t)$, si ottiene l' equazione generale dell' oscillatore smorzato forzato

$$mx''(t) = -kx(t) - \mu x'(t) + f(t)$$

Ponendo $K = k/m$, $c = \mu/m$ e $g(t) = f(t)/m$, si ottiene l' equazione

$$x''(t) + cx'(t) + Kx(t) = g(t)$$

Esempio 4.1.7 [Circuito RCL] Consideriamo un circuito elettrico formato da una resistenza R, una induttanza L e una capacitá (condensatore) C collegate in serie.Le cadute di tensione ai capi della resistenza, delĺ induttanza e del condensatore sono rispettivamente $RI(t)$, $LI'(t)$ e $Q(t)/C$, dove dove $I(t)$ é l' intensitá di corrente che attraversa il circuito e $Q(t)$ é la carica del condensatore al tempo t. Se ai capi del circuito é applicata una forza elettromotrice $E(t)$ variabile nel tempo, l' equazione differenziale che governa il circuito segue la legge di Kirchoff ed é quindi

$$LI'(t) + RI(t) + \frac{Q(t)}{C} = E(t)$$

Di solito si preferisce scrive l' equazione differenziale nell' incognita $I(t)$, eliminando $Q(t)$, dato che $Q'(t) = I(t)$, derivando la precedente uguaglianza rispetto a t si ottiene ĺ equazione differenziale lineare del secondo ordine

$$LI''(t) + RI'(t) + \frac{I(t)}{C} = E'(t)$$

◇

4.2 Teorema di Cauchy

Abbiamo visto sino ad ora una serie di esempi equazioni differenziali, e siamo riusciti in alcuni casi a determinare le soluzioni. Data una equazione differenziale ci poniamo, in maniera naturale, le seguenti domande:

- *l' equazione differenziale ammette soluzioni?*
- *I problemi di Cauchy relativi a questa equazione ammettono soluzione? La soluzione é unica?*
- *Esiste una formula che permette di esplicitare tutte le soluzioni dell' equazione?*

- *Posso scrivere le soluzioni del problema di Cauchy in termini di funzioni elementari (polinomi, seno coseno esponenziale ...)*

Ad esempio, se considero l' equazione $x'(t) = f(t)$, con $f(t)$ funzione continua, le soluzioni sono $x(t) = F(t) + C$ dove $F(t)$ é una primitiva di di $f(t)$, chiaramente sono in grado di rispondere positivamente alle prime tre domande, mentre la risposta alla quarta dipende dalla possibilitá di scrivere trovare esplicitamente la primitiva $F(t)$.

Teorema 4.2.1 (Teorema di Cauchy.) *Sia $x^{(n)} = F(t, x(t), x'(t), \cdots, x^{n-1}(t))$ una equazione differenziale di ordine n in forma normale.*
Supponiamo che: la funzione F sia C^0 (continua) in t, e C^1 (continua con derivate prime continue) nelle altre variabili, fissati $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}$, allora esiste $\epsilon > 0$ tale che nell' intorno $I_\epsilon = (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ il problema di Cauchy, 4.14 ammette una soluzione ed é unica

$$\left\{\begin{array}{ll} x^{(n)}(t) & = F(t, x(t), x'(t), \cdots, x^{n-1}(t)) \\ x(t_0) & = x_0 \\ x'(t_0) & = x_1 \\ \vdots & \\ x^{(n-1)}(t_0) & = x_{n-1} \end{array}\right. \tag{4.14}$$

Noi non dimostreremo questo teorema, la dimostrazione non ci aiuta a trovare esplicitamente la soluzione della funzione. Utilizzeremo il fatto che la soluzione é localmente unica, questo ci permettera' di dimostrare che due soluzioni di una equazione differenziale, che soddisfano gli stessi dati iniziali, ovvero che risolvono lo stesso problema di Cauchy, sono la stessa funzione
Consideriamo ora una famiglia particolare di equazioni differenziali.

Definizione 4.2.2 *Diremo che una equazione differenziale di ordine n in forma normale è* **lineare** *se é del tipo:*

$$L(y) = y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = f(t) \tag{4.15}$$

Dove le funzioni $a_i(t)$, $f(t)$ sono funzioni continue definite in un intervallo $(a, b) \subset \mathbb{R}$, diremo che la

$$L(y) = y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = 0 \tag{4.16}$$

é **l'equazione omogenea associata** *alla 4.15.*

Le equazioni di questo tipo vengono dette lineari perchè, supponendo le funzioni $a_i(t) \in C^0(a, b)$ 1'operatore

$$\begin{aligned} L \quad & C^n(a, b) \mapsto C^0(a, b) \\ & y \mapsto L(y) = y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) \end{aligned}$$

é una applicazione lineare.
La linearità dell'operatore L é immediato: si ha infatti.

$$\forall y_1(t)\ y_2(t) \in C^{(n)}(a,b)$$

$$\begin{aligned}
L(y_1+y_2)(t) =&(y_1+y_2)^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)(y_1+y_2)^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)(y_1+y_2)(t)\\
=&(y_1^{(n)}+y_2^{(n)})(t) + a_{n-1}^{(n-1)}(t)(y_1+y_2^{(n-1)})(t) + \cdots + a_0(t)(y_1+y_2)(t)\\
=&L(y_1)+L(y_2)
\end{aligned}$$

e se $\alpha \in \mathbb{R}$ *,*

$$\begin{aligned}
L(\alpha y) &= (\alpha y)^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)(\alpha y)^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)(\alpha y)'(t) + a_0(t)(\alpha y)(t)\\
&= \alpha(y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t))\\
&= \alpha L(y)
\end{aligned}$$

ovvero L é lineare.
Dato che i coefficienti $a_i(t)$ *ed il termine noto* $f(t)$ *sono funzioni* $C^0_{(a,b)}$ *in un opportuno intervallo* (a,b)*, della determinazione dell'integrale generale della 4.15 (per integrale generale intendiamo l'insieme di tutte le funzioni* $y \in C^n(a,b)$ *che verificano 4.15).*

Definizione 4.2.3 *Diremo che* $\phi_1(t), \cdots, \phi_n(t)$ *soluzioni dell'equazione differenziale omogenea 4.16* **sono linearmente indipendenti** *se* $\alpha_1\phi_1(t), + \cdots +, \alpha_n\phi_n(t) \equiv 0$ *implica* $\alpha_i = 0 \quad \forall i = 1, \cdots, n$

Teorema 4.2.4 (Teorema di struttura della equazione omogenea 4.16) *Sia A l'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea 4.16, il suo integrale generale è un sottospazio vettoriale di* $C^n(a,b)$ *di dimensione n*

Dimostrazione *notiamo che combinazione lineare di soluzioni della 4.16 sono ancora soluzione, infatti : dire che* $y_1(t)$ *ed* $y_2(t)$ *sono soluzioni della 4.16 vuol dire che* $L(y_i(t)) = 0$ *e per la linearitá della L,* $L(\alpha y_1(t)+\beta y_2(t)) = \alpha L(y_1(t))+\beta L(y_2(t)) = 0$ *ovvero combinazione di soluzioni é ancora soluzione.*
Per dimostrare che questo spazio vettoriale é di dimensione n dobbiamo trovare n funzioni che lo generano, ovvero $\phi_1, \cdots, \phi_n$ *funzioni linearmente indipendenti tale che* $\forall g(t)$ *soluzione della 4.16 esistono opportuni* $\alpha_i \in \mathbb{R}$ *tali che* $g(t) = \alpha_1\phi_1(t), \cdots, \alpha_n\phi_n(t)$*.*
Costruiamo le $\phi_i(t)$ *nel seguente modo:* $\phi_1(t)$ *soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases}
x^{(n)}(t) & = -(a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)x'(t) + a_0(t))\\
x(t_0) & = 1\\
x'(t_0) & = 0\\
\vdots & \\
x^{(n-1)}(t_0) & = 0
\end{cases}$$

ed in generale $\phi_i(t)$ come soluzione del problema:

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) & = -(a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)) \\ x(t_0) & = 0 \\ x'(t_0) & = 0 \\ x^{i-1}(t_0) & = 1 \\ \vdots & \\ x^{(n-1)}(t_0) & = 0 \end{cases}$$

ovvero tutte le $\phi_i(t)$ sono soluzioni della 4.16, ma verificano dati iniziali diversi, in particolare $\phi_i^k(t_0) = 0$ se $k \neq i$, $\phi_i^k(t_0) = 1$ se $k = i$, possiamo verificare facilmente che sono linearmente indipendenti, supponiamo che $\phi_1(t) = \beta_2\phi_2(t) + \cdots + \beta_n\phi_n(t)$ con β_i coefficienti opportuni. ora $\phi_1(t_0) = 1$ mentre, sempre per costruzione $\phi_k(t_0) = k$ per $k > 1$ e questo dimostra che deve essere $\beta_i = 0$ $\forall i$ ovvero la tesi, per dimostrare che anche $\phi_k(t)$ sono linearmente indipendenti procedo in maniera analoga valutando la derivata k-esima
Per concludere la dimostrazione, sia $g(t)$ una soluzione della equazione 4.16, allora verificherá il problema

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) & = -(a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)) \\ x(t_0) & = g(t_0) \\ x'(t_0) & = g'(t_0) \\ \vdots & \\ x^{(n-1)}(t_0) & = g^{n-1}(t_0) \end{cases} \tag{4.17}$$

Ora sia $\overline{\phi}(t) = g(t_0)\phi_1(t) + g'(t_0)\phi_2(t) + \cdots, g^{n-1}(t_0)\phi_n(t)$, notiamo che $\overline{\phi}(t)$ é combinazione lineare di $\phi_i(t)$ e dunque risolve la 4.16, inoltro verifica $\overline{\phi}(t_0) = g(t_0)$, $\overline{\phi}^k(t_0) = g^k(t_0)$ per ogni k, ovvero la $\overline{\phi}(t)$ verifica la 4.17, ma per l'unicitá della soluzione $\overline{\phi}(t) = g(t)$ e dunque la tesi.

Torniamo ora alla 4.15.

Teorema 4.2.5 (Teorema di struttura delle soluzioni della equazione 4.15) *Sia A l'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea 4.16 e B l'insieme delle soluzioni dell'equazione 4.15, $\overline{y}(t)$ un elemento di B, allora vale la relazione:*

$$B = \overline{y} + A \tag{4.18}$$

nel senso che se sommo ad $\overline{y}$ una soluzione della 4.16 ottengo una soluzione della 4.15, inoltre ogni funzione $\tilde{y}(t)$ soluzione di 4.15 si puó scrivere come somma di $\overline{y}(t)$ piú una opportuna soluzione della 4.16

Dimostrazione*: per dimostrare l'uguaglianza é sufficiente dimostrare che:*

1. $\overline{y}(t) + A \subseteq B$

2. $\overline{y}(t) + A \supseteq B$

Dimostriamo la prima implicazione:
sia $\phi(t)$ una soluzione della equazione 4.16, ovvero $L(\phi(t)) = 0$, ora dato che $L(\overline{y}(t)) = f(t)$, per la linearitá della L ottengo $L(\phi(t) + \overline{y}(t)) = f(t)$, ovvero é ancora una soluzione della 4.15, dunque $\phi(t) + \overline{y}(t) \in B$.
Dimostriamo la seconda, sia ora $\tilde{y} \in B$ ovvero $L(\tilde{y}(t)) = f(t)$, dato che per ipotesi $L(\overline{y}(t)) = f(t)$ ottengo che $L(\tilde{y}(t) - \overline{y}(t)) = f(t) - f(t) = 0$, ovvero $\tilde{y}(t) - \overline{y}(t)$ é una soluzione della 4.16, ovvero esiste una $\phi(t) \in A$ tale che $\tilde{y}(t) - \overline{y}(t) = \phi(t)$, dunque $\tilde{y}(t) = \overline{y}(t) + \phi(t)$ e questo dimostra la tesi. Possaimo definire l'insieme delle soluzioni del

Quello che abbiamo dimostrato con questi teoremi é che ogni soluzione della 4.15 $\tilde{y}(t)$ si puó scrivere nella forma $\tilde{y}(t) = \overline{y}(t) + \alpha_1\phi_1(t) + \cdots + \alpha_n\phi_n(t)$ dove $\overline{y}(t)$ é una particolare soluzione della 4.15 le $\phi_i(t)$ soluzioni linearmente indipendenti della 4.16 e gli $\alpha_i \in \mathbb{R}$.
Possiamo definire l'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale **l'integrale generale**

Data una equazione lineare é in generale difficile trovare n soluzioni linearmente indipendenti che generano lo spazio delle soluzioni dell'omogenea, ovvero, non esiste un metodo pratico che ci permette, date le funzioni $a_i(t)$ di trovare le soluzioni $\phi_i(t)$, bisogna procedere, quando é possibile caso per caso, cercando delle tecniche appropriate a secondo delle $a_i(t)$.

4.3 Equazioni differenziali lineari del primo ordine

Consideriamo l'equazione differenziale lineare del primo ordine

$$x'(t) + a(t)x(t) = f(t) \tag{4.19}$$

dove le funzioni $a(t)$ e $f(t)$ sono funzioni continue in un intervallo $I \subseteq R$. Se $f(t) = 0$ l'equazione sar l'equazione omogenea associata alla 4.19

$$x'(t) + a(t)x(t) = 0 \tag{4.20}$$

Dai teoremi di struttura delle soluzioni sappiamo che tutte le soluzioni della 4.20 sono uno spazio vettoriale generato da una funzione, e le soluzioni della 4.19 si ottengono sommando alle soluzioni della 4.20 una soluzione particolare della 4.19.
Cerchiamo le soluzioni della equazione 4.20.

Proposizione 4.3.1 *Le soluzione della equazione 4.20 sono $C\,e^{-A(t)}$ $\forall C \in R$ dove $A(t)$ é una primitiva di $a(t)$, ovvero $A(t) = \int a(t)dt$*

Dimostrazione *Vogliamo risolvere* $x'(t) + a(t)x(t) = 0$, *cerco una soluzione del tipo* $x(t) = e^{f(t)}$ *allora* $x'(t) = f'(t)e^{f(t)}$ *sostituendo nella 4.20 ottengo l'uguaglianza* $f'(t)e^{f(t)} + a(t)e^{f(t)} = 0$, *ovvero* $f'(t) = -a(t)$, $f(t) = -\int a(t)\,dt$
Cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione 4.19.

Proposizione 4.3.2 *La funzione* $c(t)e^{-A(t)}$, *dove* $A(t)$ *una primitiva di* $a(t)$ *e* $c(t) = \int f(t)e^{A(t)}\,dt$, *una soluzione particolare dell'equazione completa 4.19*

Dimostrazione *Per verificare la formula usiamo il metodo della variazione delle costanti, ovvero cerchiamo una soluzione del tipo* $\overline{y}(t) = c(t)e^{-A(t)}$ *dove* $c(t)$ *una funzione da determinare.*
Sostituendo nella 4.19 ottengo

$$e^{-A(t)}(c'(t) - c(t)a(t)) + a(t)c(t)e^{-A(t)} = f(t) \tag{4.21}$$

semplificando ottengo

$$e^{-A(t)}c'(t) = f(t) \tag{4.22}$$

$$c'(t) = f(t)e^{A(t)} \tag{4.23}$$

$$c(t) = \int f(t)\,e^{A(t)}\,dt + k \tag{4.24}$$

Possiamo ora dire che l'integrale generale della 4.19 é della forma
dove chiaramente $A(t) \int a(t)\,dt$.

$$\boxed{y(t) = Ce^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int f(t)e^{A(t)}\,dt}$$

dove chiaramente $A(t) = \int a(t)\,dt$. *e* $\forall C \in R$

4.4 Equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti

Studiamo nel dettaglio queste equazioni differenziali che saranno centrali per tutto il nostro corso.
La teoria delle equazioni del secondo ordine si può facilmente generalizzare per le equazioni di ordine n.

Definizione 4.4.1 *Una equazione differenziale lineare di ordine 2 a coefficienti costanti é una equazione del tipo 4.15 con i coefficienti* $a_i(t) = \alpha_i \in \mathbb{R}$, *ovvero una equazione nella forma*

$$L(y) = y''(t) + \alpha_1 y'(t) + \alpha_0 y(t) = f(t) \tag{4.25}$$

Dove $f(t)$ *é definita in un opportuno intervallo* $(a, b) \subset \mathbb{R}$, *ed i coefficienti* $\alpha_i \in \mathbb{R}$ *analogamente alla 4.16 diremo che la*

$$L(y) = y''(t) + \alpha_1 y'(t) + \alpha_0 y(t) = 0 \tag{4.26}$$

é **l'equazione omogenea associata** *alla 4.25.*

Se $f(t) \in C^0(a,b)$ Il teorema di Cauchy ci garantisce l'esistenza della soluzione.

Definizione 4.4.2 *Se $\phi_i(t) \quad i = 1,2$ sono 2 soluzioni della equazione omogenea, definiamo* **determinante Wronskiano W(t)** *come*

$$W(t) = \begin{vmatrix} \phi_1(t), & \phi_2(t) \\ \phi_1'(t), & \phi_2'(t) \end{vmatrix} \tag{4.27}$$

Questo determinante è legato all'indipendenza delle soluzioni dell'equazione omogenea

Proposizione 4.4.3 *$\phi_i(t) \quad i = 1,2$ sono 2 soluzioni linearmente indipendenti della equazione omogenea se e solo se $W(t) \neq 0 \quad \forall t$*

Dimostrazione *Se ho 2 soluzioni linearmente indipendenti della equazione omogenea, fissati i dati iniziali $\beta_i \quad i = 1,2$ trovo opportuni $\alpha_i\, i = 1,2$ tali che.*

$$\begin{cases} x''(t) & +a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = 0 \\ x(t_0) & = \beta_1 \\ x'(t_0) & = \beta_2 \end{cases} \tag{4.28}$$

ed $x(t) = \alpha_1\phi_1(t) + \alpha_n 2\phi_2(t)$ se scriviamo questo utilizzando la forma matriciale ottengo che ottengo che :

$$\begin{pmatrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) \\ \phi_1'(t) & \phi_2'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \tag{4.29}$$

E data l'arbitrarietá dei β_i il sistema ammette soluzione solo se la matrice ha determinante wronskiano é $\neq 0$, ovvero la tesi.

Abbiamo ora tutti i teoremi che ci danno informazioni sulla struttura delle soluzioni, per trovare l'integrale della 4.25 dobbiamo trovare 2 soluzioni linearmente indipendenti della 4.26 ed una soluzione particolare della 4.25.
Cominciamo con la ricerca delle 2 soluzioni linearmente indipendenti della 4.26.

Proposizione 4.4.4 *Data*

$$ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = 0 \tag{4.30}$$

consideriamo ora il ***polinomio caratteristico***

$$P(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c \tag{4.31}$$

.
Sia $\Delta = \sqrt{b^2 - 4ac}$ il discriminante della 4.31. Considereremo separatamente i tre casi in cui $\Delta = a^2 - 4\,b$ sia positivo, nullo o negativo.
Le soluzioni della 4.30 sono:

- *Caso* $\Delta > 0$ *.*
  Le soluzioni dell'equazione sono del tipo $C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$*. con* λ_i *zeri del polinomio caratteristico.*

- *Caso* $\Delta = 0$ *.*
  Le soluzioni dell'equazione sono del tipo $C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x}$*. con* λ_1 *zero del polinomio caratteristico con molteplicitá 2.*

- *Caso* $\Delta < 0$ *.*
  Le soluzioni del polinomio caratteristico sono complesse del tipo $\alpha + i\beta$ *, Le soluzioni dell'equazione sono del tipo* $C_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x)$*.*

Dimostrazione *Primo caso:*
l'equazione $P(\lambda) = 0$ *ammette due soluzioni reali distinte:*

$$\lambda_1 = \frac{-a - \sqrt{\Delta}}{2} \quad e \quad \lambda_2 = \frac{-a + \sqrt{\Delta}}{2}$$

Le due funzioni:

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} \ \ , \ y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$$

sono due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione differenziale. Infatti ragionando su y_1*, risulta:*

$$y_1'(x) = \lambda_1 e^{\lambda_1 x} \ \ , \ y_1''(x) = \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x}$$

Pertanto:

$$y_1'' + a\,y_1' + b\,y_1 = e^{\lambda_1 x}(\lambda_1^2 + a\,\lambda_1 + b) = e^{\lambda_1 x} P(\lambda_1) = 0 \ \ \forall\ x$$

Si verifica che le due soluzioni sono linearmente indipendenti.

Secondo caso;
l'equazione $P(\lambda) = 0$ *ammette una unica soluzione* $\lambda_1 = -\frac{a}{2}$ *contata due volte essendo in questo caso* $P(\lambda)$ *un quadrato. Allora due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione differenziali sono date da:*

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} \ \ , \ y_2(x) = x\,e^{\lambda_1 x}$$

Infatti ragionando sulla seconda, otteniamo:

$$y_2'(x) = e^{\lambda_1 x}(1 + \lambda_1 x) \ \ , \ y_2''(x) = e^{\lambda_1 x}(2\,\lambda_1 + \lambda_1^2 x)$$

Pertanto:

$$y_2'' + a\,y_2' + b\,y_2 = e^{\lambda_1 x}(2\,\lambda_1 + \lambda_1^2 x + a + a\,\lambda_1 x + b\,x) = e^{\lambda_1 x}(P(\lambda_1)\,x - a + a) = 0 \ \ \forall\ x$$

Anche in questo caso si verifica che le soluzioni sono linearmente indipendenti.

Terzo caso:
l'equazione $P(\lambda) = 0$ ha radici complesse (e coniugate) date da:

$$\lambda_1 = \frac{-a - i\sqrt{-\Delta}}{2} = \alpha - i\beta \quad e \quad \lambda_2 = \frac{-a + i\sqrt{-\Delta}}{2} = \alpha + i\beta$$

dove abbiamo posto:

$$\alpha = -\frac{a}{2} \ \ , \ \beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$$

Allora due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione differenziale son date dalle due funzioni:

$$y_1(x) = e^{\alpha\, x}\ \sin{(\beta\, x)} \quad e \quad y_2(x) = e^{\alpha\, x}\ \cos{(\beta\, x)}$$

Verifichiamolo per esempio per y_1. Si ha:

$$y_1'(x) = e^{\alpha\, x}(\alpha\ \sin{(\beta\, x)} + \beta\ \cos{(\beta\, x)})$$

$$y_1''(x) = e^{\alpha\, x}(\alpha^2\ \sin{(\beta\, x)} + 2\,\alpha\,\beta\ \cos{(\beta\, x)} - \beta^2\ \sin{(\beta\, x)})$$

Pertanto:
(4.32)

$$y_1''(x) + a\, y_1'(x) + b\, y_1(x) = e^{\alpha\, x}\left[\sin{(\beta\, x)}\left(\alpha^2 - \beta^2 + a\,\alpha + b\right) + \cos{(\beta\, x)}\,(2\,\alpha\,\beta + a\,\beta)\right]$$

$$y_1''(x) + a\, y_1'(x) + b\, y_1(x) = e^{\alpha\, x}\left[\sin{(\beta\, x)}\left(\alpha^2 - \beta^2 + a\,\alpha + b\right) + \cos{(\beta\, x)}\,(2\,\alpha\,\beta + a\,\beta)\right]$$

Ricordando che

$$\alpha = -\frac{a}{2} \quad e \quad \beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = \frac{\sqrt{4\,b - a^2}}{2}$$

si ricava che:

$$\alpha^2 - \beta^2 + a\,\alpha + b = \frac{a^2}{4} - \frac{4\,b - a^2}{4} - \frac{a^2}{2} + b = 0$$

$$2\,\alpha\,\beta + a\,\beta = \beta(2\,\alpha + a) = 0$$

da qui segue la tesi. Anche in questo caso si verifica direttamente che le due soluzioni sono linearmente indipendenti.

Vogliamo ora trovare una soluzione particolare dell'equazione 4.25, come abbiamo visto negli esempi non posso avere una formula che da una soluzione esplicita al problema, dato che $f(t)$ é una funzione continua qualsiasi. Se restringiamo il campo delle funzioni continue, allora possiamo avere una formula che ci permette di determinare la soluzione esplicitamente.

Proposizione 4.4.5 *Sia $f(x) = e^{\alpha t}(P_n(t)\cos(\beta t) + \sin(\beta t) Q_m(t))$ dove $P_n(t)$ $Q_m(t)$ polinomi di ordine rispettivamente n, m allora una soluzione particolare della 4.25 é del tipo:*

- *Se il numero $\alpha + i\,\beta$ é tale che $P(\alpha + i\,\beta) \neq 0$ allora la soluzione particolare é del tipo $e^{\alpha t}(P_{\overline{n}}(t)\cos(\beta t) + Q_{\overline{n}}(t)\sin(\beta t))$ dove $P_{\overline{n}}(t)$ $Q_{\overline{n}}(t)$ sono due opportuni polinomi da determinare di ordine $\overline{n} = \max\{m, n\}$.*

- *Se il numero $\alpha + i\,\beta$ é tale che $P(\alpha + i\,\beta) = 0$ ovvero é una soluzione del polinomio caratteristico di ordine k, allora la soluzione particolare é del tipo $x^k e^{\alpha t}(P_{\overline{n}}(t)\cos(\beta t) + Q_{\overline{n}}(t)\sin(\beta t))$ dove $P_{\overline{n}}(t)$ $Q_{\overline{n}}(t)$ sono due opportuni polinomi da determinare di ordine $\overline{n} = \max\{m, n\}$.*

Non dimostreremo la proposizione, alcuni casi sono:

1. *se $\alpha + i\,\beta = 0$ allora $f(t) = P_n(t)$*
2. *$\beta = 0$, $\alpha \neq 0$ $P_n(t) = c$ costante allora $f(t) = c\,e^{\alpha t}$*
3. *$\beta \neq 0$, $\alpha = 0$ $P_n(t) = c$ costante $Q_m(t) = 0$, allora $f(t) = c\,\cos(\beta t)$*
4. *$\beta \neq 0$, $\alpha = 0$ $Q_m(t) = c$ costante $P_n(t) = 0$, allora $f(t) = c\,\sin(\beta t)$*

le soluzioni saranno del tipo :

1. *se $\alpha + i\,\beta$ é tale che di $P(\alpha + i\,\beta) \neq 0$ la soluzione é del tipo $R_n(t)$, opportuno polinomio di grado n. Se $P(\alpha + i\,\beta) = 0$ con molteplicitá k, la soluzione é del tipo $x^k R_n(t)$ opportuno polinomio di grado n.*
2. *se $\beta = 0$, $P_n(t) = c$ allora $P(\alpha) \neq 0$ implica che la soluzione é del tipo $Ce^{\alpha t}$. Se $P(\alpha) = 0$ con molteplicitá k la soluzione é del tipo $x^k Ce^{\alpha t}$.*
3. *se $\beta \neq 0$, $\alpha = 0$ e $P_n(t) = c$ costante, $Q_m(t) = 0$, nel caso in cui $P(i\beta) \neq 0$ la soluzione é del tipo $C_1\,\cos(\beta t) + C_2\,\sin(\beta t)$*
   Se $P(i\beta) = 0$ con molteplicitá k, la soluzione é del tipo $x^k(C_1\,\cos(\beta t) + C_2\,\sin(\beta t))$
4. *analogamente al caso precedente, se $\beta \neq 0$, $\alpha = 0$ e $P_n(t) = 0$, $Q_m(t) = c$ costante , nel caso in cui $P(i\beta) \neq 0$ la soluzione é del tipo $C_1\,\cos(\beta t) + C_2\,\sin(\beta t)$*
   Se $P(i\beta) = 0$ con molteplicitá k, la soluzione é del tipo $x^k(C_1\,\cos(\beta t) + C_2\,\sin(\beta t))$

Studieremo ora un metodo che ci permette, di trovare im una forma integrale una soluzione particolare della 4.25 conoscendo giá le soluzioni dell'omogenea associata. Questo metodo si applica anche alle equazioni differenziali lineari a coefficienti qualsiasi (non costanti), mentre per le eqauzioni a coefficienti costanti abbiamo un metodo per la ricerca delle soluzioni della equazione omogenea associata, non possiamo dire altrettanto nel caso in cui i coefficienti non sono costanti. Applicheremo perció questo metodo solo alle equazioni a coefficienti costanti .

Teorema 4.4.6 (Metodo della variazione delle costanti) *Chiamiamo come al solito,* $\phi_i(t)$, $i = 1, 2$ *una base per lo spazio delle soluzioni della equazione omogenea 4.26 . Allora esistono* $\gamma_1(t), \gamma_2(t)$ *opportune funzioni tali che, la funzione* $\phi(t) = \gamma_1(y)\phi_1(t) + \gamma_2(y)\phi_2(t)$ *é una soluzione particolare della 4.25 .*

Dimostrazione *Sia*

$$\phi(t) = \gamma_1(y)\phi_1(t) + \gamma_2(y)\phi_2(t) \tag{4.33}$$

dove le funzioni $\gamma_i(t)$ *sono funzioni incognite calcoliamo* $\phi_i'(t)$ *e* $\phi''(t)$

$$\phi'(t) = \gamma_1'(y)\phi_1(t) + \gamma_2'(y)\phi_2(t) + \gamma_1(y)\phi_1'(t) + \gamma_2(y)\phi_2'(t) \tag{4.34}$$

ora imponiamo la condizione

$$\gamma_1'(y)\phi_1(t) + \gamma_2'(y)\phi_2(t) = 0 \tag{4.35}$$

otteniamo

$$\phi'(t) = \gamma_1(y)\phi_1'(t) + \gamma_2(y)\phi_2'(t) \tag{4.36}$$

e

$$\phi''(t) = \gamma'_1(y)\phi_1'(t) + \gamma'_2(y)\phi_2'(t) + \gamma_1(y)\phi_1''(t) + \gamma_2(y)\phi_2''(t) \tag{4.37}$$

Se la $\phi(t)$ *deve essere soluzione della 4.25 allora*

$$\begin{aligned} &\gamma'_1(y)\phi_1'(t) + \gamma'_2(y)\phi_2'(t) + \gamma_1(y)\phi_1''(t) + \gamma_2(y)\phi_2''(t) \\ &\alpha_1(\gamma_1(y)\phi_1'(t) + \gamma_2(y)\phi_2'(t)) + \alpha_0(\gamma_1(y)\phi_1(t) + \gamma_2(y)\phi_2(t)) = f(t) \end{aligned} \tag{4.38}$$

raccogliamo i termini in $\phi_1(t)$ *e quelli in* $\phi_2(t)$ *otteniamo.*

$$\begin{aligned} &+\gamma_1(y)(\phi_1''(t) + \alpha_1(t)\phi_1'(t) + \alpha_0(t)\phi_1(t)) + \\ &\gamma_2(y)(\phi_2''(t) + \alpha_1(t)\phi_2'(t) + \alpha_0(t)\phi_2(t)) + \\ &\gamma'_1(y)\phi_1'(t) + \gamma'_2(y)\phi_2'(t) = f(t) \end{aligned} \tag{4.39}$$

ora dato che le γ_i *sono soluzioni dell'eqauzione omogenea 4.26, la 4.39 diventa, ed unita alla condizione 4.35 abbiamo il sistema in* γ_i'

$$\begin{aligned} \gamma_1'(y)\phi_1(t) + \gamma_2'(y)\phi_2(t) &= 0 \\ \gamma_1'(y)\phi_1'(t) + \gamma_2'(y)\phi_2'(t) &= f(t) \end{aligned} \tag{4.40}$$

ora le soluzioni di questo semplice sistema sono:

$$\begin{aligned} \gamma_1'(t) &= \frac{-\phi_2(t)f(t)}{\phi_2'(t)\phi_1(t) - \phi_1'(t)\phi_2(t)} \\ \gamma_2'(t) &= \frac{\phi_1(t)f(t)}{\phi_2'(t)\phi_1(t) - \phi_1'(t)\phi_2(t)} \end{aligned} \tag{4.41}$$

e dunque $\gamma_1(t)$ e $\gamma_2(t)$ sono:

$$\gamma_1(t) = \int \frac{-\phi_2(t)f(t)}{\phi_2'(t)\phi_1(t) - \phi_1'(t)\phi_2(t)}\,dt$$
$$\gamma_2(t) = \int \frac{\phi_1(t)f(t)}{\phi_2'(t)\phi_1(t) - \phi_1'(t)\phi_2(t)}\,dt \tag{4.42}$$

Chiaramente se si vuole calcolare esplicitamente la soluzione si dovranno calcolare i due integrali, cosa non sempre possibile.

Nel caso delle equazioni differenziali lineari di grado superiore al secondo, questo metodo si puó generalizzare ed ottenere, sempre in forma integrale una soluzione .

4.4.1 Generalizzazione al caso n

Nel caso in cui $n > 2$ l'equazione differenziale e la sua omogenea associata sono:

$$y^{(n)}(t) + \alpha_{n-1}y^{(n-1)} + \alpha_1 y'(t) + \alpha_0 y(t) = f(t) \tag{4.43}$$

$$y^{(n)}(t) + \alpha_{n-1}y^{(n-1)} + \alpha_1 y'(t) + \alpha_0 y(t) = 0 \tag{4.44}$$

Il suo polinomio caratteristico sará:

$$P(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \alpha_1\lambda + \alpha_0 \tag{4.45}$$

Se siamo in grado di determinare gli zeri del polinomio caratteristico con le loro molteplicitá, allora possiamo generalizzare il metodo precedente.

In particolare :

- *se $\lambda_1 \cdots \lambda_n \in \mathbb{R}$ sono n soluzioni del polinomio caratteristico, allora le funzioni $e^{\lambda_1 t} \cdots, e^{\lambda_n t}$ sono soluzioni linearmente indipendenti della 4.44*
- *se λ_1 é soluzione del polinomio caratteristico con molteplicitá k, allora le funzioni $e^{\lambda_1 t}, \cdots, t^{k-1}e^{\lambda_1 t}$ sono k soluzioni linearmente indipendenti della 4.44*
- *se $\alpha + i\beta$ sono é soluzione di $P(\lambda) = 0$ con molteplicitá k, allora per il teorema fondamentale dell'algebra anche $\alpha - i\beta$ soluzione di $P(\lambda) = 0$ con la stessa molteplicitá.*
  A questi $2k$ zeri associo $e^{\alpha t}\cos(\beta t), e^{\alpha t}\sin(\beta t), \cdots, t^{k-1}e^{\alpha t}\cos(\beta t), t^{k-1}e^{\alpha t}\sin(\beta t)$ funzioni $e^{\lambda_1 t}, \cdots, t^{k-1}e^{\lambda_1 t}$ sono k soluzioni linearmente indipendenti della 4.44

Per le soluzioni particolari della 4.43 vale un risultato analogo al precedente, dove chiaramente k non é piu' $1, 2$ ma semplicemente $k \leq n$

Esempio 4.4.7 Consideriamo l'equazione

$$x'''(t) + x''(t) + x'(t) + x(t) = 0$$

il cui polinomio caratteristico eguagliato a zero é

$$P(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = \lambda^2(\lambda+1) + \lambda + 1$$
$$= (\lambda+1)(\lambda^2+1)$$

Con radici $\lambda = -1$ (reale e semplice), $\lambda = \pm i$ (complesse semplici). In base a quanto detto precedentemente l'integrale generale della equazione sará

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 \cos(t) + c_3 \sin(t) \tag{4.46}$$

Con $c_i \in \mathbb{R}$ $\diamond$

Esempio 4.4.8 Consideriamo l'equazione

$$x''(t) - \omega^2 x(t) = 0$$

il cui polinomio caratteristico eguagliato a zero é

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \omega^2 = 0$$

Con radici $\lambda = \pm\omega$ (reali semplici). In base a quanto detto precedentemente l'integrale generale della equazione sará

$$x(t) = c_1 e^{-\omega t} + c_2 e^{\omega t} = d_1 \sinh(\omega t) + d_2 \cosh(\omega t) \tag{4.47}$$

Con $c_i, d_i \in \mathbb{R}$ $\diamond$

Esempio 4.4.9 Consideriamo l'equazione

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0$$

il cui polinomio caratteristico eguagliato a zero é

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \omega^2 = 0$$

Con radici $\lambda = \pm i\omega$ (complesse semplici). In base a quanto detto precedentemente l'integrale generale della equazione sará

$$x(t) = c_1 e \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t) \tag{4.48}$$

Con $c_i \in \mathbb{R}$ $\diamond$

Esempio 4.4.10 Consideriamo l'equazione

$$x''(t) = 0$$

il cui polinomio caratteristico eguagliato a zero é

$$P(\lambda) = \lambda^2 = 0$$

Con radici $\lambda = 0$ (reale con molteplicitá 2). In base a quanto detto precedentemente l'integrale generale della equazione sará

$$x(t) = c_1 t + c_2 \tag{4.49}$$

Con $c_i \in \mathbb{R}$ $\diamond$

Esempio 4.4.11 Consideriamo l'equazione

$$x'''(t) - 2x''(t) + x'(t) = 0$$

il cui polinomio caratteristico eguagliato a zero é

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = \lambda(\lambda - 1)^2 = 0$$

Con radici $\lambda = 0$ (reale con molteplicitá 1) e .$\lambda = 1$ (reale con molteplicitá 2) In base a quanto detto precedentemente l'integrale generale della equazione sará

$$x(t) = c_1 + c_2 te^t + c_3 e^t \tag{4.50}$$

Con $c_i \in \mathbb{R}$ $\diamond$

Esempio 4.4.12 Consideriamo l'equazione

$$x^{(v)}(t) - x^{(iv)}(t) + x'(t) - x(t) = 0$$

il cui polinomio caratteristico eguagliato a zero é

$$P(\lambda) = \lambda^5 - \lambda^4 + \lambda - 1 = \lambda^4(\lambda - 1) + \lambda - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^4 + 1) = 0$$

Con radici $\lambda = 1$ (reale con molteplicitá 1) e (4 radici complesse, due coppie di radici coniugate), $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} \pm i\frac{1}{\sqrt{2}}$ e $\lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}} \pm i\frac{1}{\sqrt{2}}$ otteniamo 5 soluzioni linearmente indipendenti e l'integrale generale é

$$x(t) = c_1e^t + c_2e^{\frac{1}{\sqrt{2}}t}\cos(\frac{1}{\sqrt{2}}t) + c_3e^{\frac{1}{\sqrt{2}}t}\sin(\frac{1}{\sqrt{2}}t) + c_4e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}t}\cos(\frac{1}{\sqrt{2}}t) + c_5e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}t}\sin(\frac{1}{\sqrt{2}}t) \tag{4.51}$$

Con $c_i \in \mathbb{R}$ $\diamond$

! ***Esempio 4.4.13*** Vogliamo fare alcune osservazioni su"equazione:

$$L(y) = y''(t) + \alpha_1 y'(t) + \alpha_0 y(t) = f(t) \tag{4.52}$$

dove chiaramente $L(y)$ é una applicazione lineare. Supponiamo che il termine noto $f(t) = f_1(t) + \cdots + f_n(t)$ allora se $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$ sono le soluzione dell'omogenea associata e $F_i(t)$ soluzioni particolari di

$$y''(t) + \alpha_1 y'(t) + \alpha_0 y(t) = f_i(t) \tag{4.53}$$

allora la soluzione di 4.52 sono

$$C_1\phi_1(t) + C_2\phi_2(t) + F_(t) + F_2(t) + \cdots + F_n(t) \tag{4.54}$$

La dimostrazione é banale in quanto per l'equazione $\forall i,\ L(F_i) = f_i(t)$ le soluzioni dell'omogenea dipendono solo dai coefficienti α_0, α_1. e sono le stesse per tutte le 4.53 dunque la soluzione particolare é $F(t) = F_1(t) + F_2(t) + \cdots F_n(t)$ dato che

$$L(F_1(t)+F_2(t)+\cdots F_n(t)) = L(F_1(t))+L(F_2(t))+\cdots+L(F_n(t)) = f_1(t)+f_2(t)+\cdots f_n(t) \tag{4.55}$$

ovvero la tesi. $\diamond$

Vediamo un semplice esempio:

Esempio 4.4.14 Consideriamo l'equazione

$$y''(t) + y(t) = e^t + 2t \tag{4.56}$$

La sua equazione omogenea associata é:

$$y''(t) + y(t) = 0 \tag{4.57}$$

Le cui soluzioni sono $C_1 \sin(t) + C_2 \cos(t)$, cerco ora le soluzioni dei due problemi .

$$y''(t) + y(t) = e^t \tag{4.58}$$
$$y''(t) + y(t) = 2t \tag{4.59}$$

che hanno come soluzione particolare $F_1(t) = \frac{1}{2}e^t$, $F_2(t) = 2t$ deduco che le soluzioni sono:

$$y = C_1 \sin(t) + C_2 \cos(t) + \frac{1}{2}e^t + 2t \quad \forall\, C_1,\, C_2 \in \mathbb{R} \tag{4.60}$$

$\diamond$

4.4.2 Problemi ai limiti

Sino ad ora abbiamo studiato il problema di Cauchy, ci sono altri problemi legati alle equazioni differenziali, ade esempio quelli che si ottengono cercando le soluzioni di una equazione differenziale con delle condizioni non piú imposte in un singolo punto t_0 ma in diversi punti t_i. Chiameremo questi problemi, problemi ai limiti.
Per risolvere questi problemi cercheremo prima di tutto l'integrale generale della equazione differenziale e poi imporremo le condizioni nei vari punti.

Esempio 4.4.15 *Vogliamo risolvere al variare di $k \in \mathbb{R}$ il problema:*

$$\begin{cases} y''(t) + k \cdot y(t) = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(\pi) = 0 \end{cases} \tag{4.61}$$

Chiaramente la soluzione $y \equiv 0$ é sempre soluzione, la chiameremo soluzione banale. Studiamo al variare di k l'insieme delle soluzioni.
Studio

$$y''(t) + k\dot{y}(t) = 0 \tag{4.62}$$

abbiamo 3 casi:

1. $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ *in questo caso l'equazione diventa $y''(t) = 0$ che ha soluzioni $y = At + B$ $\forall A, B \in \mathbb{R}$ ora se imponiamo la condizione $y(0) = 0$ ottengo $B = 0$ e se impongo $y(\pi) = 0$ ottengo $A = 0$, ovvero solo la soluzione banale.*

2. $\mathbf{k} < \mathbf{0}$ *in questo caso l'equazione diventa, ponendo* $k = -\mu^2$ $y''(t) - \mu^2 y(t) = 0$ *che ha come polinomio caratteristico* $p(\lambda) = \lambda^2 - \mu^2$ *gli zeri sono* $\lambda = \pm\mu$ *soluzioni* $y = C_1 e^{\mu t} + C_2 e^{-\mu t}$ $\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ *possiamo scrivere questa combinazione lineare come* $y = D_1 \sinh(\mu t) + D_2 \cosh(\mu t)$ $\forall D_1, D_2 \in \mathbb{R}$.
   Imponiamo le condizioni $y(0) = 0$, *ovvero* $y = D_1 \sinh(\mu t) + D_2 \cosh(\mu t) = 0$ *dato che* $\sinh(0) = 0$ *e* $\cosh(0) = 1$ *ottengo* $D_2 = 0$.
   Imponiamo ora $y(\pi) = 0$ *ovvero* $D_1 \sinh(\mu\pi) = 0$ *ora dato che* $\mu\pi > 0$, *implica* $\sinh(\mu\pi) > 0$ *allora deve essere* $D_1 = 0$. *la soluzione é solo quella banale.*

3. $\mathbf{k} > \mathbf{0}$ *n questo caso l'equazione diventa, ponendo* $k = \mu^2$ $y''(t) + \mu^2 = 0$ *che ha come polinomio caratteristico* $P(\lambda) = \lambda^2 - +mu^2$ *gli zeri sono* $\lambda = \pm i\mu$ *soluzioni* $y = C_1 \sin(\mu t) + C_2 \cos(\mu t)$ $\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
   Imponiamo ora $y(0) = 0$ *ovvero* $y(0) = C_1 \sin(\mu 0) + C_2 \cos(\mu 0) = 0$ *dato che* $\sin(0) = 0$ *e* $\cos(0) = 1$ *ottengo* $C_2 = 0$.
   Poniamo ora $y(\pi) = 0$ *ovvero* $C_1 \sin(\mu\pi) = 0$ *se* $\mu \in \mathbb{N}$ *ottengo* $\sin(\mu\pi) = 0$ *e dunque per il valore di* $k = \mu^2 \in \mathbb{N}$ *ho infinite soluzioni* $y = C_1 \sin(\mu\pi)$, $\forall C_1 \in \mathbb{R}$, *se* $\sin(\mu\pi) \neq 0$ *allora anche* $C_1 = 0$ *e dunque rimane solo la soluzione banale.*

Quello che notiamo che pura avendo fissato due condizioni, il numero delle soluzioni dipende dal parametro k.

Vogliamo studiare un'altro esempio che in futuro ci servirá.

Esempio 4.4.16 *Vogliamo risolvere al variare di* $k \in \mathbb{R}$ *il problema:*

$$\begin{cases} y''(t) + k \cdot y(t) = 0 \\ y(0) = y(2\pi) \\ y\prime(0) = y\prime(2\pi) \\ y''(0) = y''(2\pi) \end{cases} \tag{4.63}$$

Ovvero chiedo che la funzione sia $C^2(0, 2\pi)$ *e che la funzione e le sue derivate prime e seconde si raccordino nei punti* $0, 2\pi$.
Anche in questo caso la soluzione $y \equiv 0$ *é la soluzione banale, notiamo che la terza condizione* $y''(0) = y''(2\pi)$ *é irridondante, in quanto se una soluzione della* $y''(t) + k \cdot y(t) = 0$ *e* $y(0) = y(2\pi)$ *allora l'ultima condizione é banalmente vera. Come nel precedente caso consideriamo le tre possibilitá.*

1. $\boldsymbol{k}\!= \mathbf{0}$ *in questo caso l'equazione diventa* $y''(t) = 0$ *che ha soluzioni* $y = At + B$ $\forall A, B \in \mathbb{R}$ *ora se imponiamo la condizione* $y(0) = y(2\pi)$ *ottengo* $A = 0$ *e se impongo* $y'(0) = y'(2\pi)$ *ottengo* $y = B$ $\forall B \in \mathbb{R}$

2. $\boldsymbol{k} < \mathbf{0}$ *in questo caso l'equazione diventa, ponendo* $k = -\mu^2$ $y''(t) - \mu^2 y(t) = 0$ *che ha come polinomio caratteristico* $p(\lambda) = \lambda^2 - \mu^2$ *gli zeri sono* $\lambda = \pm\mu$ *soluzioni* $y = C_1 e^{\mu t} + C_2 e^{-\mu t}$ $\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ *possiamo scrivere questa combinazione*

lineare come di seni e coseni iperbolici

$$y = D_1 \sinh(\mu t) + D_2 \cosh(\mu t) \ \forall D_1, D_2 \in \mathbb{R} \tag{4.64}$$
$$y' = \mu D_1 \cosh(\mu t) + \mu D_2 \sinh(\mu t) \ \forall D_1, D_2 \in \mathbb{R} \tag{4.65}$$

impongo le condizioni

$$y(0) = y(2\pi) \tag{4.66}$$
$$y'(0) = y'(2\pi) \tag{4.67}$$

Ricordando che $\cosh(0) = 1$ *e* $\sinh(0) = 0$ *ottengo*

$$y(0) = D_1 \sinh(0) + D_2 \cosh(0) = D_2 \tag{4.68}$$
$$y(2\pi) = D_1 \sinh(\mu 2\pi) + D_2 \cosh(\mu 2\pi) \tag{4.69}$$
$$y'(0) = D_1 \mu \cosh(0) + D_2 \mu \sinh(0) = \mu D_1 \tag{4.70}$$
$$y'(2\pi) = D_1 \mu \cosh(\mu 2\pi) + D_2 \mu \sinh(\mu 2\pi) \tag{4.71}$$

Per brevitá chiameremo $t = 2\mu\pi$, ottengo nel 4.68

$$D_2 = D_1 \sinh(t) + D_2 \cosh(t) \tag{4.72}$$
$$\mu D_1 = \mu(D_1 \cosh(t) + D_2 \sinh(t)) \tag{4.73}$$

dividendo la seconda equazione per μ ottengo il sistema

$$\begin{cases} D_1 \sinh(t) + D_2(\cosh(t) - 1) & = 0 \\ D_1(\cosh(t) - 1) + D_2 \sinh(t) & = 0 \end{cases} \tag{4.74}$$

o in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} \sinh(t) & \cosh(t) - 1 \\ \cosh(t) - 1 & \sinh(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.75}$$

Calcolo il determinante della matrice, e ricordando che $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$

$$D(t) = (\sinh(t))^2 - (\cosh(t) - 1)^2 = \tag{4.76}$$
$$= \sinh^2(t) - \cosh^2(t) - 1 + 2\cosh(t) = 2\cosh(t) \tag{4.77}$$

ma $\cosh(t) > 0 \, \forall t$, *ovvero il sistema é invertibile ed ha solo la soluzione banale* $D_1, D_2 = 0$

3. $\boldsymbol{k > 0}$ *n questo caso l'equazione diventa, ponendo $k = \mu^2$ $y''(t) + \mu^2 y(t) = 0$ che ha come polinomio caratteristico $P(\lambda) = \lambda^2 - +mu^2$ gli zeri sono $\lambda = \pm i\mu$ soluzioni $y = C_1 \sin(\mu t) + C_2 \cos(\mu t)$ $\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.*

$$y(t) = D_1 \sin(\mu t) + D_2 \cos(\mu t) \ \forall D_1, D_2 \in \mathbb{R} \tag{4.78}$$
$$y'(t) = \mu D_1 \cos(\mu t) - \mu D_2 \sin(\mu t) \ \forall D_1, D_2 \in \mathbb{R} \tag{4.79}$$

impongo le condizioni

$$y(0) = y(2\pi) \tag{4.80}$$
$$y'(0) = y'(2\pi) \tag{4.81}$$

Ricordando che $\cos(0) = 1$ *e* $\sin(0) = 0$ *ottengo*

$$y(0) = D_1 \sin(0) + D_2 \cos(0) = D_2 \tag{4.82}$$
$$y(2\pi) = D_1 \sin(\mu 2\pi) + D_2 \cos(\mu 2\pi) \tag{4.83}$$
$$y'(0) = \mu(D_1 \mu \cos(0) - D_2 \mu \sin(0)) = \mu D_1 \tag{4.84}$$
$$y'(2\pi) = \mu(D_1 \cos(\mu 2\pi) - D_2 \sin(\mu 2\pi)) \tag{4.85}$$

Per brevitá chiameremo $s = 2\mu\pi$*, ottengo nel 4.82*

$$D_2 = D_1 \sin(s) + D_2 \cos(s) \tag{4.86}$$
$$\mu D_1 = \mu(D_1 \cos(s) - D_2 \sin(s)) \tag{4.87}$$

dividendo la seconda equazione per μ *otteniamo:*

$$D_1 \sin(s) + D_2(\cos(s) - 1) = 0 \tag{4.88}$$
$$D_1(\cos(s) - 1) - D_2 \sin(s) = 0 \tag{4.89}$$

dobbiamo cercare le soluzioni (D_1, D_2) *a* s *fissato. Posso riscrivere il sistema come*

$$\begin{pmatrix} \sin(s) & \cos(s) - 1 \\ \cos(s) - 1 & -\sin(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.90}$$

Calcolo il determinante della matrice, e ricordando che $\cos^2(s) + \sin^2(s) = 1$

$$D(t) = -(\sin(s))^2 - (\cos(s) - 1)^2 = \tag{4.91}$$
$$= -\sin^2(s) - \cos^2(s) - 1 + 2\cos(s) = -2 + 2\cos(s) = 2(\cos(s) - 1) \tag{4.92}$$

Ora se $\cos(s) \neq 1$ *il determinante é diverso da* 0 *ed il sistema ha solo la soluzione banale* $D_1, D_2 = 0$ *.*
Se $\cos(s) = 1$ *allora* $\sin(s) = 0$ *e questo implica che la matrice*

$$\begin{pmatrix} \sin(s) & \cos(s) - 1 \\ \cos(s) - 1 & -\sin(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.93}$$

ricordando che $s =$ *ovvero ogni* $y(t) = D_1 \sin s + D_2 \cos s$ *é soluzione.*
Ovvero abbiamo soluzioni non banali solo se $s = 2n\pi$ $n \in \mathbb{N}$ *ovvero* $\mu 2\pi = 2\pi n$ *con* n *intero opportuno.*
In buona sostanza se $\mu \in \mathbb{N}$ *abbiamo soluzioni non banali del tipo* $D_1 \sin(2\pi n) + D_2 \cos(2\pi n)$

Vediamo come possiamo utilizzare il metodo della variazione delle costanti per stimare una soluzione di alcune equazioni differenziali.

! *Esempio 4.4.17 (una stima importante)* *Consideriamo l'equazione differenziale*

$$a\,y''(t) + b\,y'(t) + c\,y(t) = f(t) \tag{4.94}$$

supponiamo che le due soluzioni del polinomio caratteristico siano reali e distinti, $\lambda_1,\ \lambda_2 < 0$ *e inoltre supponiamo che la funzione* $f(t)$ *sia tale che* $|f(t)| < \epsilon$ *, con un opportuno* $0 < \epsilon$ *. Allora possiamo stimare la soluzione particolare in funzione di* $\epsilon\ \forall t > 0$.
Utilizziamo il metodo della variazione delle costanti:
Siano $\phi_1(t) = e^{\lambda_1 t}$, $\phi_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ *soluzioni dell'omogenea associata. La soluzione particolare sará* $\overline{y}(t) = \gamma_1(t)\phi_1(t) + \gamma_2(t)\phi_2(t)$ *dove* $\gamma_1(t), \gamma_2(t)$ *sono:*

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= \int \frac{-\phi_2(t)f(t)}{\phi_2'(t)\phi_1(t) - \phi_1'(t)\phi_2(t)}\,dt \\ \gamma_2(t) &= \int \frac{\phi_1(t)f(t)}{\phi_2'(t)\phi_1(t) - \phi_1'(t)\phi_2(t)}\,dt \end{aligned} \tag{4.95}$$

ora $\phi_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ *implica* $\phi_1'(t) = \lambda_1 e^{\lambda_1 t}$ *e* $\phi_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ *implica* $\phi_2'(t) = \lambda_2 e^{\lambda_2 t}$ *la quantitá* $\phi_2'(t)\phi_1(t) - \phi_1'(t)\phi_2(t) = (\lambda_2 - \lambda_1)e^{\lambda_1\lambda_2 t}$ *otteniamo*

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= \int \frac{-e^{\lambda_2}f(t)}{(\lambda_2 - \lambda_1)e^{(\lambda_1+\lambda_2)t}}\,dt = \int \frac{-f(t)e^{-\lambda_1 t}}{(\lambda_2 - \lambda_1)}\,dt \\ \gamma_2(t) &= \int \frac{e^{\lambda_1}f(t)}{(\lambda_2 - \lambda_1)e^{(\lambda_1+\lambda_2)t}}\,dt = \int \frac{-f(t)e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_2 - \lambda_1)}\,dt \end{aligned} \tag{4.96}$$

ricapitolando

$$\overline{y}(t) = e^{\lambda_1 t}\int_0^t \frac{-f(s)e^{-\lambda_1 s}}{(\lambda_2 - \lambda_1)}\,ds + e^{-\lambda_2 t}\int_0^t \frac{-f(s)e^{-\lambda_2 s}}{(\lambda_2 - \lambda_1)}\,ds \tag{4.97}$$

passando ai moduli

$$\left|\overline{y}(t)\right| \le \left|e^{\lambda_1 t}\int_0^t \frac{-f(s)e^{-\lambda_1 s}}{(\lambda_2 - \lambda_1)}\,ds\right| + \left|e^{-\lambda_2 t}\int_0^t \frac{-f(s)e^{-\lambda_2 s}}{(\lambda_2 - \lambda_1)}\,ds\right| \tag{4.98}$$

dato che la funzione esponenziale é positiva e la $|f(s)| < \epsilon$

$$\left|\overline{y}(t)\right| \le \frac{\epsilon}{(\lambda_2 - \lambda_1)}\left(\left|e^{\lambda_1 t}\int_0^t e^{-\lambda_1 s}\,ds\right| + \left|e^{\lambda_2 t}\int_0^t e^{-\lambda_2 s}\,ds\right|\right) \tag{4.99}$$

da cui deduco
(4.100)

$$|\overline{y}(t)| \le \frac{\epsilon}{(\lambda_2 - \lambda_1)}\left(\left|e^{\lambda_1 t}\frac{(e^{-\lambda_1 t} - 1)}{-\lambda_1}\right| + \left|e^{\lambda_2 t}\frac{(e^{-\lambda_2 t} - 1)}{-\lambda_2}\right|\right) \le \frac{\epsilon}{(\lambda_2 - \lambda_1)}\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right)$$

Ovvero

$$|\overline{y}(t)| \le \epsilon \cdot C(\lambda_1, \lambda_2) \tag{4.101}$$

Si puo' ottenere un risultato analogo anche nei casi in cui λ_1 *ha molteplicitá* 2 *e* $\lambda_1 < 0$ *, oppure nel caso in cui* $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ *e* $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ *con* $\alpha < 0$.

Capitolo 5

Appendice A

5.1 Introduzione

Definiamo le seguenti funzioni

$$\begin{array}{lrcl} \cosh(x) & \frac{e^x+e^{-x}}{2} & = & \textbf{Coseno iperbolico} \\ \sinh(x) & \frac{e^x-e^{-x}}{2} & = & \textbf{Seno iperbolico} \end{array} \tag{5.1}$$

Studiamo le proprietà di queste funzioni.

Proposizione 5.1.1 *le funzioni* $\cosh(x)$ *e* $\sinh(x)$ *hanno le seguenti proprietà.*

1. $\cosh(x)$, $\sinh(x)$ *sono funzioni* C^∞
2. $\cosh'(x) = \sinh(x)$ *e* $\sinh'(x) = \cosh(x)$
3. $\cosh''(x) = \cosh(x)$ *e* $\sinh''(x) = \sinh(x)$
4. $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Dimostrazione:
La prima proprietà è ovvia dato che le due funzioni sono somma di funzioni C^∞.
Per dimostrare la seconda noto che $\cosh'(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2} = \sinh(x)$, *ed analogamente* $\sinh'(x) = \frac{e^x-(-)e^{-x}}{2} = \cosh(x)$.
la terza è ovvia, basta utilizzare iterativamente la 2.
Per dimostrare la quattro noto che, se chiamo $f(x) = \cosh^2(x) - \sinh^2(x)$ *ottengo* $f'(x) = 2\cosh(x)\sinh(x) - 2\cosh(x)\sinh(x) = 0$, *ovvero la funzione è costante. Dal fatto che* $\cosh(0) = \frac{1+1}{2} = 1$ *e* $\sinh(0) = \frac{1-1}{2} = 0$, *ottengo che* $f(0) = \cosh^2(0) - \sinh^2(0) = 1$, *ovvero* $f \equiv 1$

Proposizione 5.1.2 *Ulteriori proprietà delle funzioni* $\cosh(x)$, $\sinh(x)$.
Per ogni $A, B \in \mathbb{R}$ *esistono opportuni* $C, D \in \mathbb{R}$ *tali che:*
$A \cdot e^x + B \cdot e^{-x} = C \cdot \cosh(x) + D \cdot \sinh(x)$, *e vale il vice versa.*

Dimostrazione:
Esplicitando le funzioni $\sinh(x)$ *e* $\cosh(x)$ *ottengo:*

$$A \cdot e^x + B \cdot e^{-x} = C \cdot (\frac{e^x + e^{-x}}{2}) + D \cdot (\frac{e^x - e^{-x}}{2}) \tag{5.2}$$

ovvero

$$A \cdot e^x + B \cdot e^{-x} = e^x \cdot (\frac{C + D}{2}) + e^{-x} \cdot (\frac{C - D}{2}) \tag{5.3}$$

in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

dato che la matrice è invertibile ottengo la tesi.
Vogliamo disegnare il grafico della due funzioni $\cosh(x)$, $\sinh(x)$.
Noto che la funzione $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > \frac{e^x}{2} \quad \cosh(x) > \frac{e^{-x}}{2}$, *ottengo che:*

$$\cosh(x) > max\{e^x/2, e^{-x}/2\} > 0 \tag{5.5}$$

Ora dalla 5.1.1 ottengo che $\cosh''(x) = \cosh(x) > 0$, *ovvero* $\cosh(x)$ *è una funzione positiva e convessa.*
Sempre per la 5.1.1 ho che $\sinh'(x) = \cosh(x) > 0$ *ovvero* $\sinh(x)$ *è crescente, e dato che* $\sinh(0) = 0$ *ho che* $\sinh(x) > 0$ *se* $x > 0$, $\sinh(x) < 0$ *se* $x < 0$.
Dato che $\sinh''(x) = \sinh(x)$ *ho che :*
$\sinh(x)$ *è convessa se* $x > 0$ *è concava se* $x > 0$.
Per la definizione di $\sinh(x)$ *ho che*

$$\frac{e^x}{2} > \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} > -\frac{e^{-x}}{2} \tag{5.6}$$

Per il comportamento all'infinito, tenendo conto che $\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$ *e che* $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ *ottengo che le funzioni* $\cosh(x)$ *e* $\sinh(x)$ *tendono a* $\frac{e^x}{2}$ *quando* $x \to \infty$, *analogamente,* $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ *ho che* $\cosh(x)$ *tende a* $\frac{e^{-x}}{2}$ e $\sinh(x)$ *tende a* $-\frac{e^{-x}}{2}$

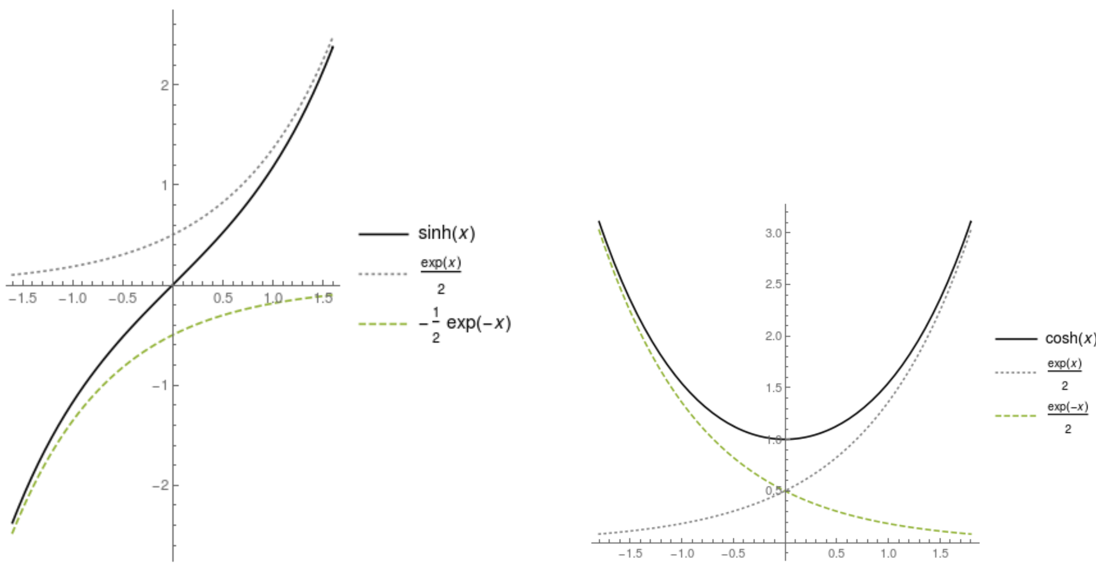

Figura 5.1: Seno e coseno iperbolici.

Capitolo 6

Appendice B

6.1 Funzioni pari e dispari

Data una funzione $f(x)$ definita in un insieme simmetrico $A = [-a, a]$ diremo che la funzione è **pari** *se:*

$$\forall \quad x \in A \quad f(x) = f(-x) \tag{6.1}$$

diremo che la funzione è **dispari** *se:*

$$\forall \quad x \in A \quad -f(x) = f(-x) \text{ ovvero } f(x) = -f(-x) \tag{6.2}$$

Esempi di funzioni pari sono le funzioni $x^2, \quad x^{2n}, \quad \cos(x), \quad \cosh(x)$, esempi di funzioni dispari sono $x, \quad x^{2n+1}, \quad \sin(x), \quad \sinh(x)$. Studiamo le proprietà delle funzioni pari e dispari.

Proposizione 6.1.1 *le funzioni pari/dispari hanno le seguenti proprietà.*

1. *Una combinazione lineare di funzioni pari/dispari, è ancora pari/dispari .*
2. *L' unica funzione che è sia pari e dispari è la funzione costante $= 0$*
3. *Prodotto di funzioni pari è una funzione pari, prodotto di funzioni dispari è una funzione pari, prodotto di una funzione pari ed una dispari è una funzione dispari.*
4. *ogni funzione $f(x)$ si può scrivere, in maniera univoca, come somma di $f(x) = f_p(x) + f_d(x)$, dove $f_p(x)$ è una funzione pari e $f_d(x)$ è una funzione dispari.*
5. *Data $f(x) \in C^1(A)$ funzione pari, $f'(x)$ è una funzione dispari, analogamente se $f(x) \in C^1(A)$ funzione dispari, $f'(x)$ è una funzione pari.*
6. *Data $f(x)$ pari, allora $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.*

7. *Data $f(x)$ dispari,allora $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$.*

Dimostrazione:
Dimostriamo la 1 : date $f(x)$ $g(x)$ funzioni pari, dati α $\beta \in \mathbb{R}$ considero $h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$ ho che $h(-x) = \alpha f(-x) + \beta g(-x) = \alpha f(x) + \beta g(x) = h(x)$ ovvero $h(x)$ è pari.
nel caso delle funzioni dispari procedo in maniera analoga.
Dimostriamo la 2, supponiamo che $f(x)$ è una funzione sia pari che dispari, allora $f(-x) = f(x) = -f(-x)$ ovvero $2f(-x) = 0$ e questo è possibile solo per la funzione $f(x) \equiv 0$
Verifichiamo la 3, siano $f(x)$ e $g(x)$ funzioni pari, sia $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, allora $h(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot g(x) = h(x)$. Se $f(x)$ e $g(x)$ sono funzioni dispari ottengo, data $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, $h(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = (-)f(x) \cdot (-)g(x) = h(x)$.
Analogamente se $f(x)$ è pari $g(x)$ dispari ottengo, data $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, $h(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot (-)g(x) = -h(x)$.

Per dimostrare la 4, data $f(x)$ definisco 2 opportune funzioni

$$f_p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \qquad f_d(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \tag{6.3}$$

chiaramente $f_p(-x) = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = f_p(x)$, ovvero e pari, analogamente dimostro che $f_d(x)$ è dispari, inoltre $f_p(x) + f_d(x) = f(x)$
Per dimostrare che la scelta è univoca, supponiamo di poter scrivere $f(x)$ come $f(x) = f_{p1}(x) + f_{d1}(x) = f_{p2}(x) + f_{d2}(x)$ dove $f_{p1}(x)$ $f_{p2}(x)$, sono funzioni pari, $f_{d1}(x)$ $f_{d2}(x)$ sono funzioni dispari. Ora ottengo che $f_{p1}(x) - f_{p2}(x) = f_{d1}(x) - f_{d2}(x)$, ora la prima espressione, per la 1 è pari, mentre la seconda é dispari e dunque, per la 2 deve essere $f_{d1}(x) = f_{d2}(x)$, $f_{p1}(x) = f_{p2}(x)$
Verifichiamo la 5. Supponiamo $f(x)$ pari, calcoliamo la derivata, otteniamo: $f'(x) = lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = lim_{h\to 0} \frac{f(-x-h)-f(-x)}{h}$ ovvero $f'(x) = lim_{h\to 0} - \frac{f(-x-h)-f(-x)}{-h}$ ma $lim_{h\to 0} \frac{f(-x-h)-f(-x)}{-h} = f'(-x)$, ottengo la tesi $f'(x) = -f'(-x)$, ovvero $f'(x)$ è dispari.
Analogamente dimostro che se $f(x)$ è dispari $f'(x) = f'(-x)$, $f'(x)$ è pari.
Dimostriamo la 6, supponiamo $f(x)$ pari, spezziamo l'integrale in due parti, ovvero $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = \int_{-a}^{0} f(x)\, dx \int_{0}^{a} f(x)\, dx$ ora se cambio variabile nel primo integrale, ponendo $t = -x$ ed utilizzando il fatto che $f(x)$ è pari $\int_{-a}^{0} f(x)\, dx = \int_{a}^{0} f(-t)(-1)\, dt = \int_{0}^{a} f(t)\, dt$ chiamando $x = t$ e sostituendo nella relazione precedente ottengo

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\, dx. \tag{6.4}$$

Per dimostrare la 7 procedo in maniera analoga. $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = \int_{-a}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{a} f(x)\, dx$ applico il cambiamento di variabile $t = -x$, insieme al fatto che $f(x)$ dispari ottengo $\int_{-a}^{0} f(x)\, dx = \int_{a}^{0} f(-t)(-1)\, dt = -\int_{0}^{a} f(t)\, dt$ chiamando $x = t$ ottengo

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = -\int_{0}^{a} f(x)\, dx + \int_{0}^{a} f(x)\, dx = 0 \tag{6.5}$$

Capitolo 7

Appendice C

7.1 Introduzione

Consideriamo l'espressione

$$A\cos(x) + B\sin(x) \quad con \quad A^2 + B^2 > 0 \tag{7.1}$$

Possiamo scriverla anche nella forma

$$\sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos(x) + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin(x)\right) \tag{7.2}$$

Ora dato che $\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} = 1$ *posso trovare un angolo* ϕ *in modo che*

$$\cos(\psi) = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \tag{7.3}$$

$$\sin(\psi) = -\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \tag{7.4}$$

la 7.2 diventa

$$\sqrt{A^2+B^2}(\cos(\phi)\cos(x) - \sin(\phi)\sin(x)) = \sqrt{A^2+B^2}\cos(x+\phi) \tag{7.5}$$

ovvero l'ampiezza della funzione è $\sqrt{A^2+B^2}$.
Consideriamo l'espressione $a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)$ *dove* $a_n, b_n \in \mathbb{R}$. *Sappiamo che*

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \tag{7.6}$$

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos(\theta) - i\sin(\theta) \tag{7.7}$$

sommando e sottraendo le due identit ottengo

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos(\theta) \tag{7.8}$$

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin(\theta) \tag{7.9}$$

ovvero

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \tag{7.10}$$

$$\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \tag{7.11}$$

Siano $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ *usando queste ultime 2 identità posso scrivere*

$$a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \tag{7.12}$$

e raccogliendo

$$a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = (\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i})e^{inx} + (\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i})e^{-inx} \tag{7.13}$$

chiameremo i coefficienti complessi

$$A_n = \tfrac{a_n}{2} + \tfrac{b_n}{2i} \tag{7.14}$$
$$A_{-n} = \tfrac{a_n}{2} - \tfrac{b_n}{2i} \tag{7.15}$$

chiaramente $\overline{A}_n = A_{-n}$ *, inoltre* $b_n = 0$ *se e solo se* A_n, A_{-n} *sono numeri reali, e* $a_n = 0$ *se e solo se* $A_n\, A_{-n}$ *hanno solo parte immaginaria.*
viceversa dati A_n *e* A_{-n} *tali che e* $\overline{A}_n = A_{-n}$

$$A_n e^{inx} + A_{-n} e^{-inx} = (A_n + A_{-n}) \cos(nx) + i(A_n - A_{-n}) \sin(nx) \tag{7.16}$$

e chiaramente sia $A_n + A_{-n}$ *che* $i(A_n - A_{-n})$ *sono numeri reali. determinati in maniera univoca*
Viste le relazioni precedenti posso scrivere la serie di Fourier

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n e^{inx} \tag{7.17}$$