Esame di Complementi di Matematica
3 luglio 2014

1) Data $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{se } x \in [0, \pi] \\ -x & \text{se } x \in [-\pi, 0] \end{cases}$

Calcolare la serie di Fourier associata.

2) Data $g(x,y) = x + 2xy$ calcolare

$F(x) = \int_{2x+1}^{3x+1} g(x,y)\, dy$, $F(x)$ e verificare

usando la nota formula.

3) Risolvere al variare di $k \in \mathbb{R}$ le soluzioni di

$y''' + k y'' = x^2$.

Risolvere

$$\begin{cases} y''' + y'' = x^2 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$$

4) Risolvere $\begin{cases} y' = 4x + y \\ x' = y + 2x \\ x(0) = 1 \\ y(0) = 2 \end{cases}$

Calcolare

1) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+16}\right)$, $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-3}{s^2+30-2s}\right)$, $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+2}{s^2+1}\right)$

$\mathcal{L}\left(e^t \cdot \cos t\right)$, $\mathcal{L}\left(t \cdot \sin(2t)\right)$, $\mathcal{L}\left(t^3 \cosh(t)\right)$

Esercizio 1

Posso scrivere $f(x) = f_P(x) + f_D(x)$ dove

$f_P(x) = A|x|$, $f_D(x) = Bx$ dato che la funzione

e' una retta se $x \geq 0$, e se $x \leq 0$

$$Ax + Bx = 3x \qquad \begin{cases} A + B = 3 \\ -A + B = -1 \end{cases}$$
$$-Ax + Bx = -x$$

$A = 2$, $B = 1$

Ovvero per calcolare $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2x\cos(nx)\,dx = \frac{4(\cos(\pi n) - 1)}{\pi n^2}$$

e $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 1 \cdot x \operatorname{sen}(nx)\,dx = -\frac{2(\cos(n\pi))}{n}$

Posso anche calcolare direttamente a_n, b_n come

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \int_{-\pi}^{0} -x\cos(nx)\,dx + \int_0^{\pi} 2x\cos(nx)\,dx$$ e

analogamente per b_n

Esercizio 2

$$A(x) = \int_{2x+1}^{3x+1} x + 2xy \, dy = 3x^2 + 5x^3$$

$$A'(x) = 6x + 15x^2$$

otteniamo lo stesso risultato usando la formula.

Esercizio 3

$$y''' + k y'' = x^2$$

Studio $y''' + k y'' = 0$

se $k \neq 0$ il polinomio caratteristico è

$$\lambda^3 + k\lambda^2 = 0 \qquad \lambda^2(\lambda + k) = 0 \qquad \lambda = 0 \text{ molt } 2$$
$$\lambda = -k \text{ molt } 1$$

le soluzioni sono

$$C_1 + C_2 x + C_3 e^{-kx}$$

$k = 0$ il polinomio è $\lambda^3 = 0$

$\lambda = 0$ molt 3

soluzioni

$$C_1 + C_2 x + C_3 x^2$$

Ora la Teoria dice (Marcellini e Sbordone, Esercitazioni di Matematica 2° volume parte prima 4C pag 222 - 231) che se $k \neq 0$ ho una soluzione del tipo $y = x^2(Ax^2 + Bx + C)$ sostituendo nell'equazione trovo che i coefficienti A, B, C, opportuni

$$y = \frac{x^4}{12k} - \frac{x^3}{3k^2} + \frac{x^2}{k^3}$$

Se $k=0$

devo cercare una soluzione del tipo

$y = Ax^5$ e trovo $A = \frac{1}{60}$

$$y = \frac{1}{60} x^5$$

Ora se voglio studiare

$$\begin{cases} y''' + k y'' = x^2 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$$

uso la soluzione con $k=1$

$$y = c_2 + c_3 x + c_1 e^{-x} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3} + x^2$$

dato che abbiamo 2 condizioni al bordo e 3 parametri liberi (c_1, c_2, c_3) la soluzione avrà un parametro libero

$y(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0$

$y'(0) = 3 \Rightarrow c_3 - c_1 = 3$ la soluzione sarà

$$y = \frac{t^4}{12} - \frac{t^3}{3} + t^2 + (-1 + e^{-t}) c_1 + t(3 + c_1)$$

Esercizio 4

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) & x(0) = 1 \\ y'(t) = y(t) + 4x(t) & y(0) = 2 \end{cases}$$

$\mathcal{L}(x(t)) = sX(s) - X(0)$, $\quad \mathcal{L}(y(t)) = sX(s) - Y(0)$

Se sostituisco ottengo

$$\begin{cases} (s-2)X = Y+1 \\ (s-1)Y = 4X+2 \end{cases}$$ risolvo il sistema in X, Y,

ottengo $Y = \dfrac{2s}{(s^2-3s-2)}$, $X = \dfrac{(s+1)(s-2)}{(s^2-3s-2)(s-2)} = \dfrac{(s+1)}{(s^2-3s-2)}$

ora il polinomio s^2-3s-2 ha due radici distinte

$$s_{1,2} = \frac{+3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

Posso scomporre Y, ed X come somme $\dfrac{A}{(s-s_1)} + \dfrac{B}{(s-s_2)}$

Poi faccio l'antitrasformata, ottengo

$$\left(\frac{-5+\sqrt{17}}{2\sqrt{17}}\right) e^{\frac{1}{2}(3-\sqrt{17})t} + \left(\frac{5+\sqrt{17}}{2\sqrt{17}}\right) e^{\frac{1}{2}(3+\sqrt{17})t} = X(t)$$

$$\left(\frac{-3+\sqrt{17}}{\sqrt{17}}\right) e^{\frac{1}{2}(3-\sqrt{17})t} + \left(\frac{3+\sqrt{17}}{\sqrt{17}}\right) e^{\frac{1}{2}(3+\sqrt{17})t} = Y(t)$$

Esercizio 5

Semplice applicazione delle proprietà della Trasformata ed antitrasformata.

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+16}\right) = \cos(4t)$$

$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-3}{s^2+30-2s}\right) =$ dato che il polinomio $s^2+30-2s$ non ammette zeri $s^2+30-2s = (s-1)^2+29$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-3}{(s-1)^2+29}\right) = e^t\cos(\sqrt{29}\,t) - \frac{2e^t \operatorname{sen}[\sqrt{29}\,t]}{\sqrt{29}}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{(s+2)}{(s^2+1)} = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2+1}\right) = \cos(t) + 2\operatorname{sen}(t)$$

$$\mathcal{L}(e^t\cos t) = \frac{(s-1)}{1+(s-1)^2}, \quad \mathcal{L}(t\cdot\sin(2t)) = \frac{4s}{(4+s^2)^2}$$

$\mathcal{L}(t^3\cosh(t))$, posso scriverlo come

$\mathcal{L}\left(t^3\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}(t^3e^t) + \mathcal{L}(t^3e^{-t})\right)$ e poi usare le formule note, oppure posso applicare la formula $\mathcal{L}(t^3\cosh(t)) = \frac{6(1+6s^2+s^4)}{(s^2-1)^4}$