

## Prova di Complementi di Analisi del 16 febbraio 2016

**Esercizio 1** Sia data la funzione  $f(x)$  definita come

$$f(x) = \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{2}, & \text{se } x \in [-\pi, 0] \\ -2x + \frac{\pi}{2}, & \text{se } x \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ x - \pi & \text{se } x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

Calcolare il suo sviluppo in serie di Fourier.

**Esercizio 2** Data la funzione  $f(x, y) = 3x^2y + 2x^2y$ , calcolare  $F'(x)$ , dove la  $F(x) = \int_{2x}^{x+1} f(x, y) dy$

Verificare che il risultato che si ottiene mediante la nota formula coincide con il calcolo diretto della  $F'(x)$

**Esercizio 3** Risolvere al variare di  $k \in \mathbb{R}$  l'equazione differenziale.

$$(1) \quad y''(x) + 2ky'(x) + y(x) = 9e^x$$

Risolvere il problema di Cauchy.

$$(2) \quad \begin{aligned} y''(x) + \frac{5}{2}y'(x) + y(x) &= 9e^x \\ y(0) &= 4 \\ y'(0) &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

**Esercizio 4** Risolvere in  $\mathbb{C}$   $z^2 - 4\bar{z} + 12 = 0$ .

Risolvere  $z^4 = (\bar{z})^2$  scrivendo in maniera esplicita le soluzioni.

**Esercizio 5** Date le funzioni  $g(x) = 1$  se  $|x| < 1$  e 0 altrimenti calcolare al convoluzione  $(2g * g)(t)$ , sia  $f(t) = g(2t)$  calcolare  $(f * g)(t)$ . Che relazione esiste tra i due risultati?