

Prova di Complementi di Analisi del 26 gennaio 2016

Esercizio 1 Sia data la funzione $f(x)$ definita come

$$f(x) = \begin{cases} \pi/2 & \text{se } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ x & \text{se } x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}], x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

Calcolare il suo sviluppo in serie di Fourier.

Esercizio 2 Data la funzione $f(x, y) = 3xy^2 + 2x^2y$, calcolare $F'(x)$, dove la $F(x) = \int_{2x}^{3x+1} f(x, y) dy$

Verificare che il risultato che si ottiene mediante la nota formula coincide con il calcolo diretto della $F'(x)$

Esercizio 3 Risolvere al variare di $k \in \mathbb{R}$ l'equazione $y''''(x) + k * y'' = x$

Risolvere il problema di Cauchy.

$$(1) \quad \begin{aligned} y''''(x) &= x \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 0 \\ y''(0) &= 1 \\ y'''(0) &= 1 \end{aligned}$$

Esercizio 4 Risolvere in \mathbb{C} $z^2 + 4\bar{z} + 12 = 0$.

Risolvere $z^6 = -1$ scrivendo in maniera esplicita le soluzioni.

Esercizio 5 Date le funzioni $f(x) = \text{Cos}(x)$, $g(x) = U(x)e^{-2x}$, dove $U(x)$ vale 0 se $x < 0$, 1 altrimenti, calcolare la convoluzione. Date le funzioni $f(x) = |x|$ se $\|x\| < 1$, 0 altrimenti e $g(x) = 1$ se $|x| < 1$ e 0 altrimenti, calcolare la convoluzione.