

Prova di Complementi di Analisi del 23 settembre 2016

Esercizio 1 Sia data la funzione $f(x)$ definita come

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & \text{se } x \in [-\pi, \frac{-\pi}{2}] \\ x^2 & \text{se } x \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \frac{\pi}{2} & \text{se } x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

Calcolare il suo sviluppo in serie di Fourier.

Esercizio 2 Data la funzione $f(x, y) = 2xy + 2x^2y$, calcolare $F'(x)$, dove la $F(x) = \int_{2x^2}^{x+2} f(x, y) dy$

Verificare che il risultato che si ottiene mediante la nota formula coincide con il calcolo diretto della $F'(x)$

Esercizio 3 Risolvere al variare di $k \in \mathbb{R}$ l'equazione $y'''(x) + y' = e^{k*x}$

Risolvere il problema di Cauchy.

$$(1) \quad \begin{aligned} y'''(x) + y'(x) &= e^x \\ y(0) &= 2 \\ y'(0) &= \frac{1}{2} \\ y''(0) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Esercizio 4 Risolvere in \mathbb{C} $z^2 - 4\bar{z} + 12 = 0$.

Risolvere $z^3 = (\bar{z})^2$ scrivendo in maniera esplicita le soluzioni.

Esercizio 5 Date le funzioni $g(x) = 1$ se $0 < x < 1$ e 0 altrimenti calcolare al convoluzione $(g * g)(t)$, sia $f(t) = g(t - 1)$ calcolare $(f * g)(t)$. Che relazione esiste tra i due risultati?