

Prova di Complementi di Analisi del 22 luglio 2016

Esercizio 1 Sia data la funzione $f(x)$ definita come

$$f(x) = \begin{cases} -\sin[x] - \cos[x] & \text{se } x \in [-\pi, 0] \\ +\sin[x] + \cos[x] & \text{se } x \in [0, \pi] \end{cases}$$

Calcolare il suo sviluppo in serie di Fourier.

Esercizio 2 Data la funzione $f(x, y) = 3xy + 3yx^2$, calcolare $F'(x)$, dove la $F(x) = \int_{3x}^{2x+1} f(x, y) dy$

Verificare che il risultato che si ottiene mediante la nota formula coincide con il calcolo diretto della $F'(x)$

Esercizio 3 Risolvere al variare di $k \in \mathbb{R}$ l'equazione differenziale.

$$(1) \quad y''(x) + 2ky'(x) + 10y(x) = x$$

Risolvere il problema di Cauchy.

$$(2) \quad \begin{aligned} y''(x) + 2y'(x) + 10y(x) &= x \\ y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 4 \end{aligned}$$

Esercizio 4 Risolvere in \mathbb{C} $z^2 - 2\bar{z} + 6 = 0$.

Risolvere $z^2 = (\bar{z})^3$ scrivendo in maniera esplicita le soluzioni.

Esercizio 5 Date le funzioni $g(x) = 1$ se $|x| < 1$ e 0 altrimenti calcolare al convoluzione $(2g * g)(t)$, sia $f(t) = g(2t)$ calcolare $(f * g)(t)$. Che relazione esiste tra i due risultati?