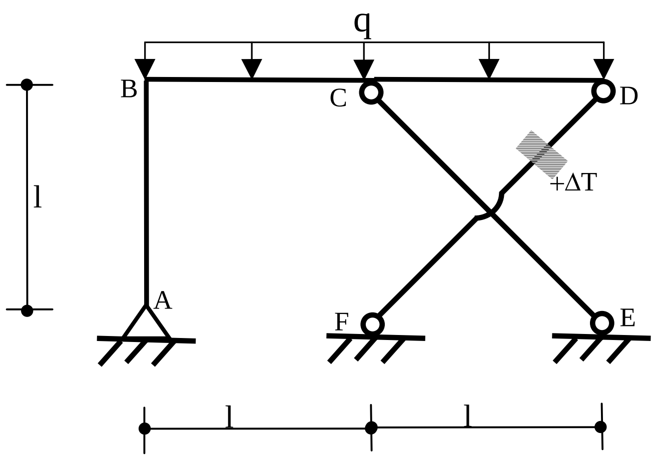
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FERRARA
PROVA SCRITTA DI STATICA
FERRARA, 03/06/2008

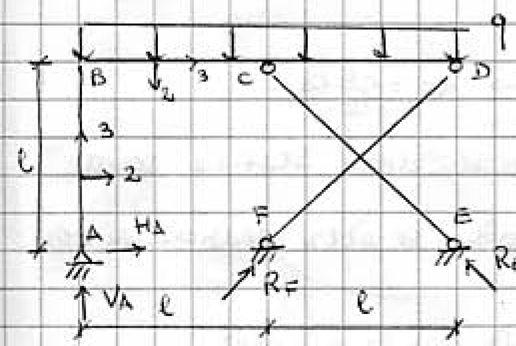


$$l = 1.5 \text{ m}, \; q = 2 \text{ t/m}, \; \sigma_{AMM} = 2400 \;\; \text{kg/cm}^2$$
$$E = 2.1 \; 10^6 \text{ kg/cm}^2, \; \Delta T = 10°\text{C}, \; \alpha = 10^{-5} °\text{C}^{-1}$$

La travatura iperstatica di figura è realizzata con profilati IPE.

1. Utilizzando il metodo delle forze risolvere la travatura in presenza del solo carico q e disegnare i diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione (N, T, M). Trascurare le deformazioni assiali.
2. Progettare la travatura.
3. Calcolare lo spostamento orizzontale in B.
4. Risolvere nuovamente la travatura considerando anche il carico termico (uniforme) nel tratto DF e le deformazioni assiali. Disegnare i nuovi diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione (N, T, M).

1)



Equazioni cardinali della Statica:

(→) $H_A + R_F\frac{\sqrt{2}}{2} - R_E\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

(↑) $V_A + R_F\frac{\sqrt{2}}{2} + R_E\frac{\sqrt{2}}{2} = 2ql$

(A↺) $R_F\frac{\sqrt{2}}{2}l + R_E\frac{\sqrt{2}}{2}2l = 2ql^2$

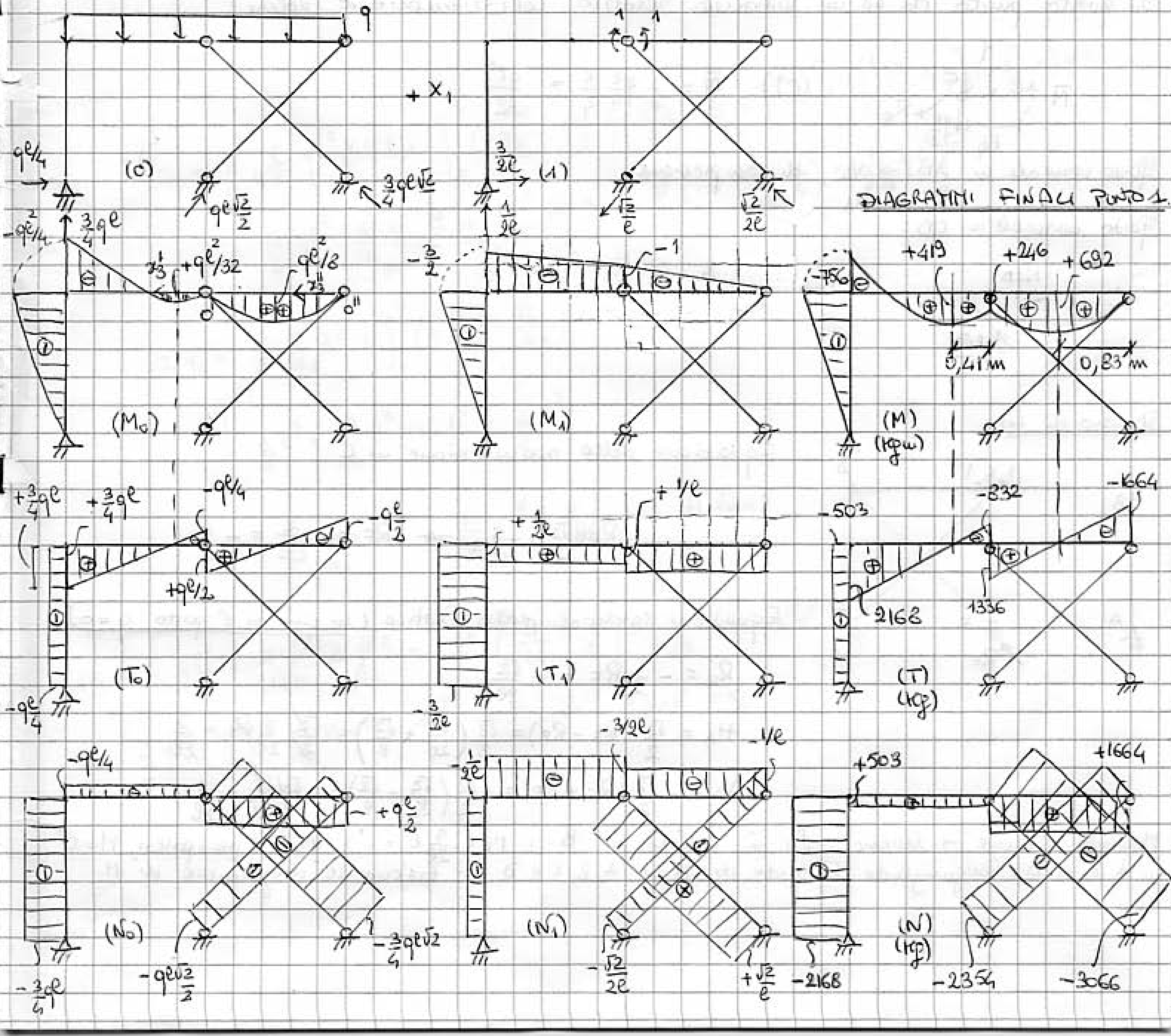
Le tre equazioni sono linearmente indipendenti (per verificarlo, basta calcolare il rango della matrice del sistema, che è pari a 3). La travatura è 1 volta iperstatica:

$s = 4$ gradi di vincolo

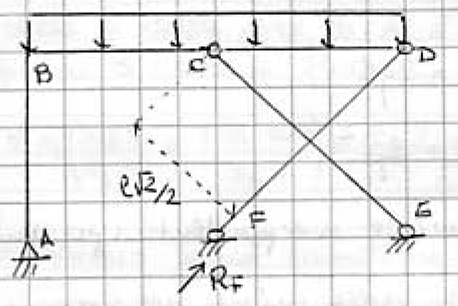
$p = 3$ eq.ni lin. indip.

Come incognita iperstatica è possibile scegliere il momento flettente in C: $X_1 = -M_C$.

DIAGRAMMI FINALI PUNTO 1



Studio di (0)



Eq.ne della sconnessione in C:

$$(C\circlearrowleft)_{FDC} \quad R_F\,\ell\frac{\sqrt{2}}{2} = q\frac{\ell^2}{2} \rightarrow R_F = q\frac{\ell}{2}\sqrt{2}$$

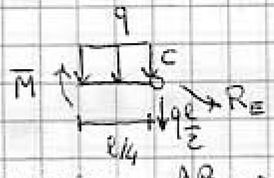
Utilizzando le eq.ni cardinali della Statica scritte a pagina precedente per calcolare le altre reazioni vincolari:

$$R_E = -\frac{1}{2}\left(R_F - 2q\ell\sqrt{2}\right) = q\ell\sqrt{2} - q\frac{\ell}{4}\sqrt{2} = \frac{3}{4}q\ell\sqrt{2}$$

$$H_A = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(R_E - R_F\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{3}{4}q\ell\sqrt{2} - q\ell\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}}\,q\ell\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{4} = q\frac{\ell}{4}$$

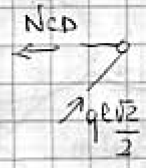
$$V_A = 2q\ell - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(R_E + R_F\right) = 2q\ell - \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\frac{5}{4}q\ell\cancel{\sqrt{2}} = \frac{3}{4}q\ell$$

Momento flettente in CD → come nella trave appoggiata.
" " " AB → lineare, nullo in A, $q\frac{\ell}{4}\cdot\ell$ in B (fibre esterne tese)
Per calcolare il momento in BC, occorre prima disegnare il taglio.
$T_{Bc} = V_A$ $\quad T_{C^-} = V_A - q\ell = -q\ell/4$ e varia linearmente in BC. Dunque T_0 si annulla a $\ell/4$ da C.
In questo punto M_0 ha un massimo relativo. Calcoliamone il valore:



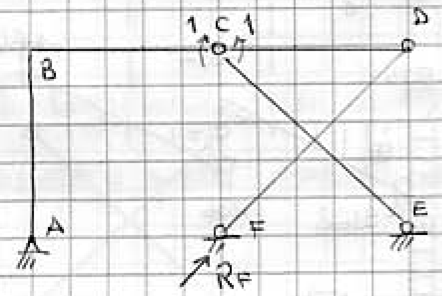
$$(C\circlearrowleft) \quad \bar{M} = \frac{1}{2}q\frac{\ell}{4}\frac{\ell}{4} = \frac{q\ell^2}{32}$$

Sforzo normale in AB → V_A, di compressione
BC → H_A, idem
Sforzo normale in CD:



$$N_{CD} = q\ell\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{q\ell}{2}$$

Studio di (1)



Equazione della sconnessione in C:

$$(C\circlearrowleft)_{FDC} \quad R_F\,\ell\frac{\sqrt{2}}{2} = -1 \Rightarrow R_F = -\frac{2}{\sqrt{2}\,\ell} = -\frac{\sqrt{2}}{\ell}$$

Equazioni cardinali della Statica (in cui si è posto $q=0$):

$$R_E = -\frac{1}{2}R_F = +\frac{\sqrt{2}}{2\ell}$$

$$H_A = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(R_E - R_F\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2\ell} + \frac{\sqrt{2}}{\ell}\right) = \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}}\frac{3}{2\ell}\cancel{\sqrt{2}} = \frac{3}{2\ell}$$

$$V_A = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(R_E + R_F\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2\ell} - \frac{\sqrt{2}}{\ell}\right) = +\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{2\ell} = \frac{1}{2\ell}$$

Momento flettente → lineare. Lo si calcola in B: $M_B = -\frac{3}{2\ell}\ell = -\frac{3}{2}$, $M_C = 1$ per ipotesi, $M = 0$ in A e in D. Congiungendo le quote di M in A, B, C e D si traccia il diagramma di M.

Eq.ne di congruenza: $\eta_{10} + \eta_{11} X_1 = \eta_1$

$\eta_1 = 0$ (c'è continuità della rotazione in C nella travatura isostatica)

$$EJ_1 \eta_{10} = \frac{1}{3} l \, q\frac{l^2}{4}\frac{3}{2} + \int_0^l \left(q\frac{l}{4}x_3' - q\frac{x_3'^2}{2}\right)\left(-1-\frac{x_3'}{2l}\right)dx_3' - \frac{1}{24}ql^3$$

$$= q\frac{l^3}{8} + \frac{ql^3}{16} - \frac{ql^3}{24} = \frac{7}{48}ql^3$$

$$EJ_1 \eta_{11} = \frac{l}{\cancel{3}}\frac{\cancel{9}^{3}}{4} + \int_0^l \left(-1-\frac{x_3'}{2l}\right)^2 dx_3' + \frac{l}{3} = \frac{3}{4}l + \frac{19}{12}l + \frac{l}{3} = \frac{8}{3}l$$

$$X_1 = -\frac{7}{48_{16}}ql^{\cancel{3}2}\frac{\cancel{3}}{8\cancel{l}} = -\frac{7}{128}ql^2 = -246 \text{ kgm}$$

Calcoli: $M_B = -q\frac{l^2}{4} + \frac{3}{2}\frac{7}{128}ql^2 = -\frac{43}{256}ql^2 = -756$ kgm

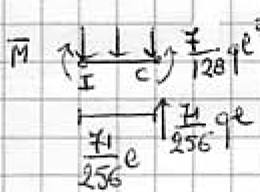
$T_A = -\frac{43}{256}ql = -503$ kg $= T_{B^-}$

$T_{B^+} = \frac{3}{4}ql - \frac{1}{2\cancel{l}}\frac{7}{128}ql^{\cancel{2}} = \frac{185}{256}ql = 2168$ kg

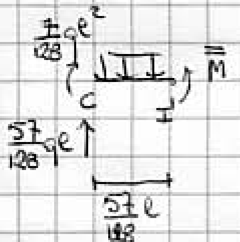
$T_{C^-} = T_{B^+} - ql = -\frac{71}{256}ql = -832$ kg

$T_{C^+} = q\frac{l}{2} - \frac{7}{128}ql = \frac{57}{128}ql = 1336$ kg

$T_D = -q\frac{l}{2} - \frac{7}{128}ql = -\frac{71}{128}ql = 1664$ kg



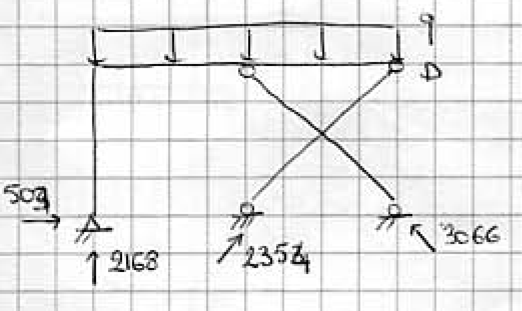
(I) $\overline{M} = \left(\frac{71}{256}\right)^2 ql^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{71}{256}\right)^2 ql + \frac{7}{128}ql^2 = \left[\frac{7}{128} + \frac{1}{2}\left(\frac{71}{256}\right)^2\right]ql^2 = 419$ kgm

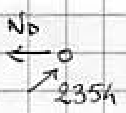


(I') $\overline{\overline{M}} = \left[\frac{7}{128} + \frac{1}{2}\left(\frac{57}{128}\right)^2\right]ql^2 = 692$ kgm

$R_F = ql\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{7}{128}ql^{\cancel{2}}\frac{\sqrt{2}}{\cancel{l}} = \frac{\sqrt{2}}{2}ql\left(1+\frac{7}{64}\right) = \frac{71}{128}\sqrt{2}\,ql = 2354$ kg

$R_E = \frac{3}{4}ql\sqrt{2} - \frac{7}{128}ql^{\cancel{2}}\frac{\sqrt{2}}{2\cancel{l}} = \frac{\sqrt{2}}{2}ql\left(\frac{3}{2} - \frac{7}{128}\right) = \frac{185}{256}\sqrt{2}\,ql = 3066$ kg





$N_D = 2354\frac{\sqrt{2}}{2} = 1664$ kg

2) Progetto. $W_1 \geq \frac{756 \cdot 100}{2400} = 31{,}5 \text{ cm}^3 \longrightarrow$ IPE 100 $\begin{cases} W_1 = 34{,}2 \text{ cm}^3 \\ I_1 = 171 \text{ cm}^4 \\ A = 10{,}3 \text{ cm}^2 \end{cases}$ (4)

Il nodo B della parte di A è sollecitato anche a sforzo normale di entità massima (sulla trave) verifica in B (solo a flessione)

$$\sigma = +\left(\frac{2168}{10{,}3} + \frac{756 \cdot 100}{34{,}2}\right) = 2421 \frac{kg}{cm^2} > \sigma_{AMM}!$$ (σ_{max} a compressione)

È necessario perciò considerare IPE 120 $\begin{cases} W_1 = 53 \text{ cm}^3 \\ I_1 = 318 \text{ cm}^4 \\ A = 13.2 \end{cases}$

Controllo della biella CE: $\sigma = \frac{3066}{13{,}2} = 232 \frac{kg}{cm^2} << \sigma_{AMM}$.

3) Spostamento orizzontale in B. Se si trascura la deformabilità assiale delle tiradature, lo spostamento orizzontale di B è nullo (perchè le bielle sono indeformabili)

4) Carico termico

$$\eta_{1t} + \eta_{10} + \eta_{11} X_1 = \cancel{\eta_1}^{\,0}$$

$$\eta_{1t} = \int_{DF} N_1 \varepsilon_t = N_1 \varepsilon_t \ell\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{\cancel{\ell}} \alpha \Delta t \cancel{\ell}\sqrt{2} = 2\alpha\Delta t$$

$$2\alpha\Delta t + \frac{7}{48}\frac{q\ell^3}{EI_1} + \frac{8\ell}{3EI_1} X_1 = 0$$

$$X_1 = -\frac{7}{128} q\ell^2 - \frac{6EI_1\alpha\Delta t}{8\ell}$$

$$\stackrel{!}{=} \underbrace{-756}_{kgm} - \underbrace{\underbrace{\left[\frac{6 \cdot 2{,}1 \cdot 10^{6} \cdot 318 \cdot 10^{-5} \cdot 10}{8 \cdot 150}\right]}_{kg \cdot cm} \cdot 10^{-2}}_{kgm} = -756 - 3 \text{ kgm} \cong -759 \text{ kgm}$$

I diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione non cambiano significativamente rispetto a quelli disegnati al punto (1).