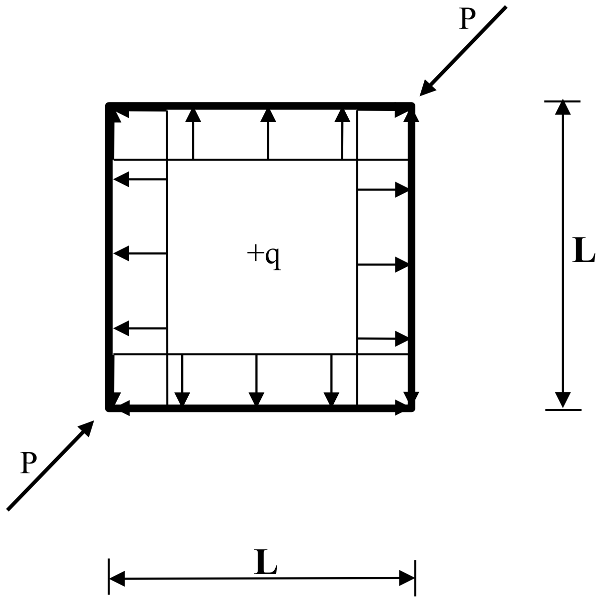
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA
UNIVERSITÀ DI FERRARA
PROVA SCRITTA DI STATICA
27/09/2012



L= 3 m, P = 50 kN, q = 10 kN/m
E = 210 GPa, σ_{amm} = 240 MPa

La travatura in figura deve essere realizzata con profilati IPE.

- Disegnare i diagrammi quotati delle caratteristiche della sollecitazione in presenza delle sole forze P.
- Dimensionare la travatura.
- Calcolare lo spostamento relativo dei punti di applicazione delle forze P.
- Disegnare i diagrammi quotati delle caratteristiche della sollecitazione in presenza delle forze P e di una pressione interna alla struttura pari a +q.

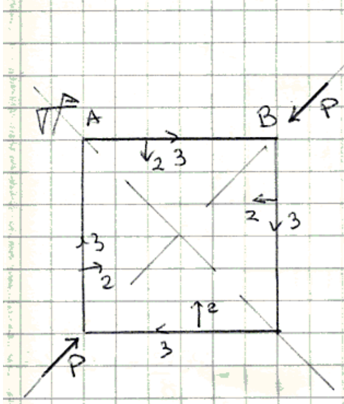


fig. 1

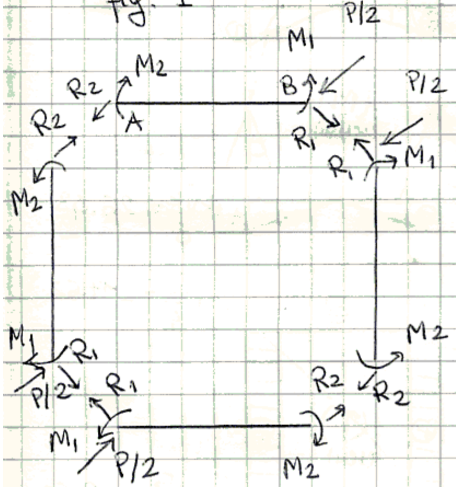


fig 2.

La travatura presenta due assi di simmetria, sia geometrica che di carico. (fig. 1).
Per ragioni di simmetria, la componente dell'azione interna parallela all'asse di simmetria è zero in assenza di carico applicato e pari a $P/2$ sui nodi dove agisce il carico.
Si perviene dunque alla figura 2.
Studiando l'equilibrio di un lato (ad esempio AB), si ottengono le relazioni:

$$(\searrow) \quad R_1 = 0$$

$$(\swarrow) \quad R_2 = -P/2$$

$$(B\circlearrowleft) \quad M_2 - M_1 - R_2 \frac{\sqrt{2}}{2} l = 0$$

da cui:

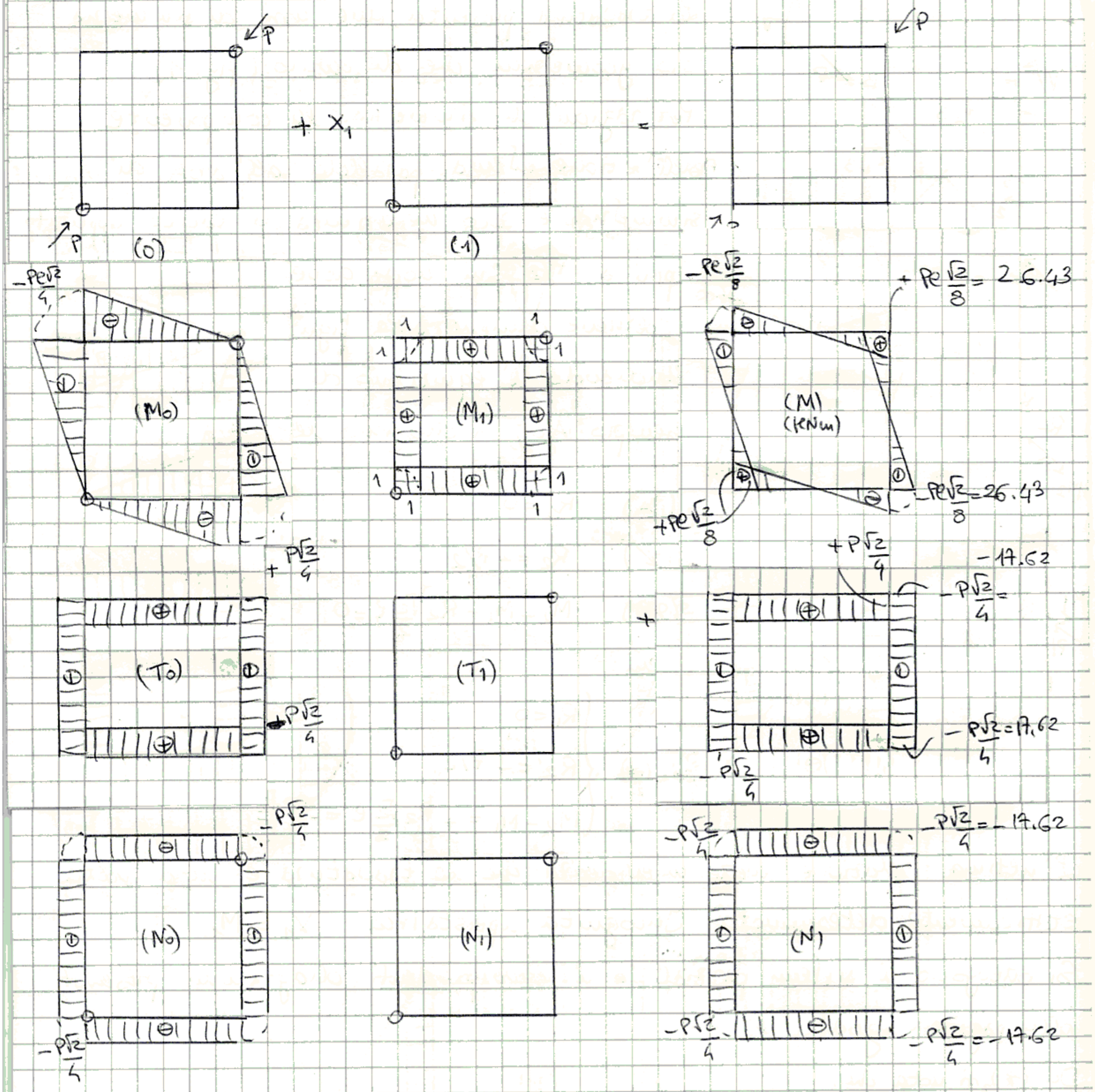
$$(*) \quad \begin{cases} R_1 = 0 \\ R_2 = -P/2 \\ M_2 - M_1 = + R_2 \frac{\sqrt{2}}{2} l = -Pl\frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

L'ultima relazione mette in evidenza che la travatura è una volta staticamente determinata. Incognita iperstatica: $X_1 = M_1$.
Si ottengono i sistemi parziali e i corrispondenti diagrammi presentati alla pagina seguente.
Da $(*)_3$ si nota che:

se $M_1 = 0$, allora $M_2 = -Pl\frac{\sqrt{2}}{4}$ (sistema (0))

Se $M_1 = 1$ e $P = 0$, allora $M_2 = 1$ (sistema (1))

Corrispondentemente, si tracciano i diagrammi dell'azione interne



Eq.ne di congruenza: $\eta_{10} + \eta_{11} X_1 = \eta_1$

$\eta_1 = 0$

$$\eta_{10} = \int_s \frac{1}{EI_1} M_1 M_0 \, ds = \frac{\cancel{4}}{EI_1} \cdot 1 \cdot \ell \frac{P\ell\sqrt{2}}{\cancel{4}} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{P\ell^2\sqrt{2}}{2EI_1}$$

$$\eta_{11} = \int_s \frac{1}{EI_1} M_1^2 \, ds = \frac{4}{EI_1} \cdot 1 \cdot \ell = \frac{4\ell}{EI_1}$$

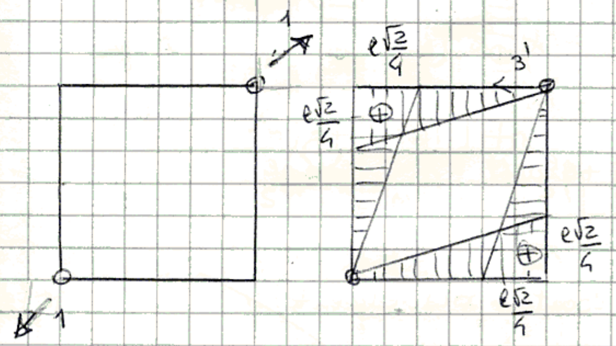
$$X_1 = -\frac{\eta_{10}}{\eta_{11}} = + \frac{P\ell^{\cancel{2}}\sqrt{2}}{2} \frac{1}{4\cancel{\ell}} = + \frac{\sqrt{2}}{8} P\ell = 26.43 \text{ kNm}$$

Quindi $M_A = \frac{Pe\sqrt{2}}{4} - \frac{Pe\sqrt{2}}{8} = \frac{Pe\sqrt{2}}{8}$

Dimensionamento:

$$W_1 \geq \frac{\frac{Pe\sqrt{2}}{8}}{\sigma_{AMM}} = \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{8}}{240 \cdot \cancel{10^6}} \cdot \cancel{10}^6 \text{ cm}^3 = 110 \text{ cm}^3 \quad \text{IPE } 180 \begin{cases} W_1 = 146 \text{ cm}^3 \\ I_1 = 1317 \text{ cm}^4 \\ A = 24 \text{ cm}^2 \end{cases}$$

Spostamento dei punti di applicazione delle forze P:



$$1 \cdot \delta = -\frac{4}{EI_1}\int_0^e \left(\frac{\sqrt{2}}{4}x_3'\right)\left(-\frac{Pe\sqrt{2}}{8} + \frac{P\sqrt{2}}{4}x_3'\right)dx_3'$$

$$= -\frac{\cancel{4}\sqrt{2}}{\cancel{4}EI_1}\frac{P\sqrt{2}}{\cancel{4}}\int_0^e \left(-\frac{ex_3'}{2} + x_3'^2\right)dx_3'$$

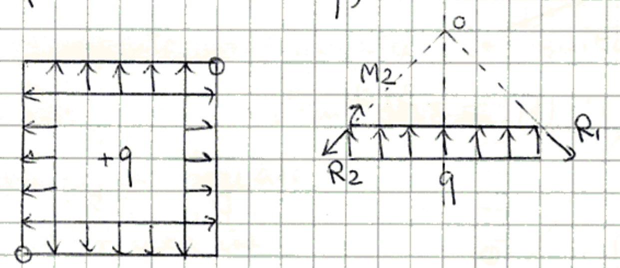
$$= -\frac{P}{2EI_1}\left[-\frac{ex_3'^2}{4} + \frac{x_3'^3}{3}\right]_0^e$$

$$= -\frac{Pe^3}{2EI_1}\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right] = -\frac{Pe^3}{24EI_1}$$

Con i valori numerici, si calcola che:

$$\delta = -\frac{50 \cdot 10^3 \cdot (300)^3 \cdot 10^4}{24 \cdot 210 \cdot 10^9 \cdot 1317} = -\frac{50 \cdot 27 \cdot \cancel{10^3} \cdot \cancel{10^6} \cdot 10^4}{24 \cdot 210 \cdot \cancel{10^9} \cdot 1317} = -2,03 \text{ cm}$$ (avvicinamento relativo)

In presenza del carico q, il sistema (0) si modifica come segue:

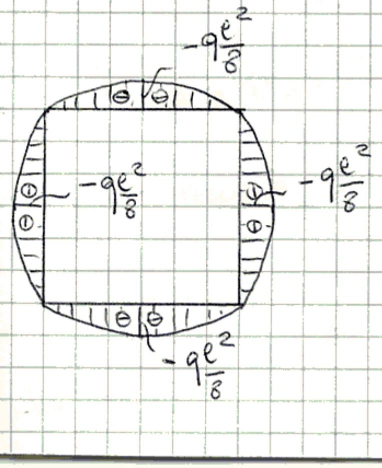


$(\rightarrow)\ R_1\frac{\sqrt{2}}{2} = R_2\frac{\sqrt{2}}{2}$

$(\uparrow)\ R_1\frac{\sqrt{2}}{2} + R_2\frac{\sqrt{2}}{2} = qe$

$(0\circlearrowleft)\ M_2 = 0$

Da cui $M_2 = 0$ e $R_1 = R_2 = q\frac{e}{2}$.



In presenza del solo carico q, si ha che:

$$\eta_{10} = \frac{4}{EI_1}\int_0^e \left(+q\frac{e}{2}x_3' - q\frac{x_3'^2}{2}\right)dx_3'$$

$$= \frac{4q}{2EI_1}\int_0^e \left(x_3'^2 - ex_3'\right)dx_3'$$

$$= \frac{2q}{EI_1}\left[\frac{e^3}{3} - \frac{e^2 e}{2}\right] = -\frac{2qe^3}{6EI_1} = -\frac{qe^3}{3EI_1}$$

Ancora si ha che $\eta_{11} = 4\ell/EI_1$.

Pertanto:

$$X_1 = -\frac{\eta_{10}}{\eta_{11}} = \frac{q\ell^3}{3EI_1} \cdot \frac{EI_1}{4\ell} = \frac{q\ell^2}{12}$$

Diagrammi delle c.s. in presenza del solo carico q: