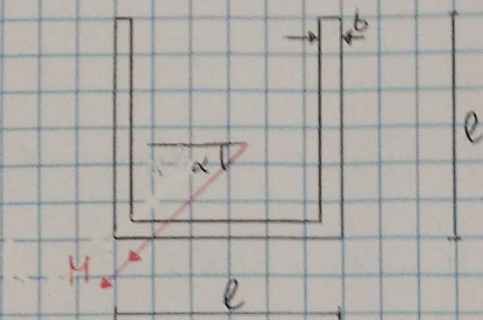


ESERCIZIO 1



$$M = 50 \text{ kNm}$$

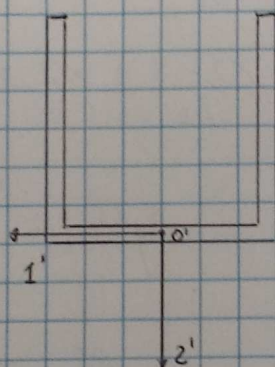
$$\alpha = 45^\circ$$

$$l = 20 \text{ cm}$$

$$b = 1 \text{ cm}$$

Essendo l'asse della coppia M inclinato e non parallelo rispetto ad uno degli assi principali d'inerzia della sezione, siamo in presenza di FLESSIONE DEVIATA

• Calcolo del BARICENTRO



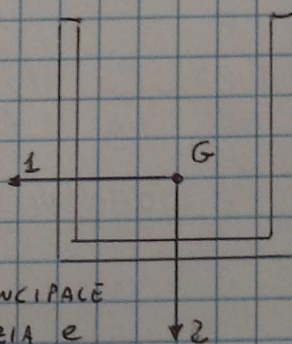
Inserisco un S.R. ausiliario $(1', 2', O')$

$$X_{1'G} = 0 \quad \text{Per SIMMETRIA}$$

$$X_{2'G} = S_{1'} = \frac{1}{36l} \left[2bl \left(-\frac{l}{2} - \frac{b}{3} \right) \right] \quad \text{TRASC.}$$

$$= -\frac{bl^2}{36l} = -\frac{l}{3}$$

• Calcolo dei momenti principali d'inerzia



S.R. PRINCIPALE
D'INERZIA e
BARICENTRICO

sono 2 rettangoli (inerzia rettangolo) (area ret.) * (distanza baricentro da asse 1 al quadrato)

$$I_1 = 2 \left[\frac{1}{12} bl^3 + bl \left(\frac{l}{6} \right)^2 \right] + \frac{1}{12} b^3 l + bl \left(\frac{l}{3} \right)^2$$

NON DI TRASP.

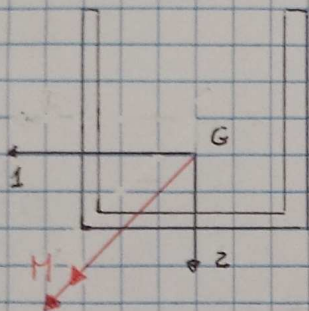
$$= 2 \cdot \left[\frac{4}{36} bl^3 \right] + \frac{1}{9} bl^3$$

$$= \frac{2}{9} bl^3 + \frac{1}{9} bl^3 = \frac{1}{3} bl^3$$

$$I_z = 2 \left[\frac{1}{12} b l^3 + b l \left(\frac{l}{2} \right)^2 \right] + \frac{1}{12} b l^3$$

$$= b l^3 \frac{1}{2} + \frac{1}{12} b l^3 = \frac{7}{12} b l^3$$

• Calcolo delle sollecitazioni



Scomposizione M lungo 1 e 2

$$M_1 = M \cos \alpha = M \sqrt{2}/2$$

$$M_2 = M \sin \alpha = M \sqrt{2}/2$$

Applico NAVIER per il calcolo delle σ

$$\sigma = \frac{M_1}{I_1} x_2 - \frac{M_2}{I_2} x_1$$

Uguando a 0 σ e ricavo l'EQUAZIONE DELL'ASSE NEUTRO

$$0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{M}{I_1} x_2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{M}{I_2} x_1$$

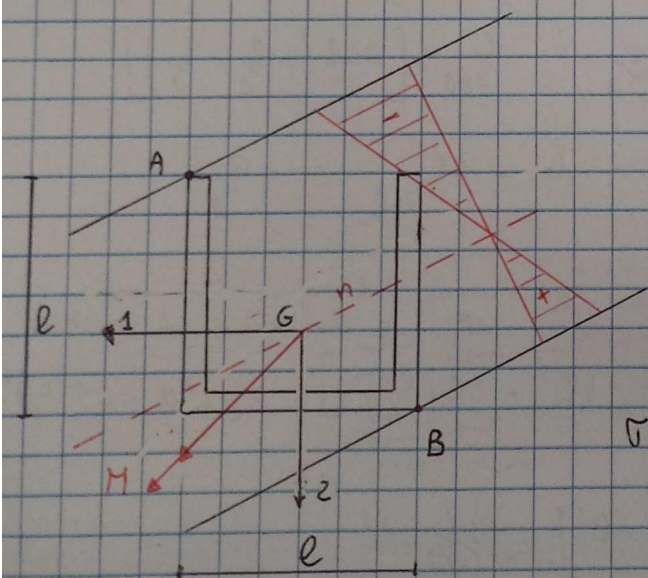
$$\frac{x_2}{I_1} = \frac{x_1}{I_2}$$

$$x_2 = \frac{I_1}{I_2} x_1$$

$$x_2 = \frac{6l^3}{12} \cdot \frac{12}{76l^3} x_1$$

$$x_2 = \frac{4}{7} x_1$$

$$\arctan\left(\frac{4}{7}\right) \approx 30^\circ$$



I Punti più sollecitati saranno quelli più distanti da n

$$A \left(\frac{l}{2}, -\frac{2}{3}l \right)$$

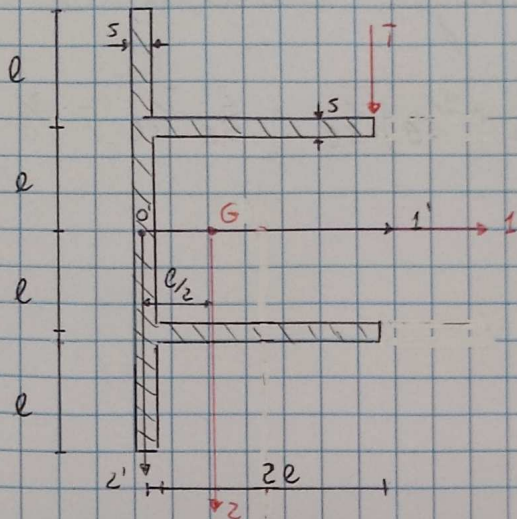
$$B \left(-\frac{l}{2}, \frac{l}{3} \right)$$

$$\sigma_A = \frac{M \sqrt{2}}{2} \left[\left(-\frac{2}{3}l \right) \cdot \frac{3}{6l^3} - \frac{l}{12} \cdot \frac{12}{76l^3} \right]$$

$$= \frac{M \sqrt{2}}{2} \left(-\frac{20}{76l^2} \right) = \underline{\underline{-252,36 \text{ MPa}}}$$

$$\sigma_B = \frac{M \sqrt{2}}{2} \left[\left(\frac{l}{3} \right) \cdot \frac{3}{6l^3} - \left(-\frac{l}{2} \right) \cdot \frac{12}{76l^3} \right] = \frac{M \sqrt{2}}{2} \left(\frac{13}{76l^2} \right) = \underline{\underline{164,15 \text{ MPa}}}$$

ESERCIZIO



• Determino il baricentro

$$x_2'G = 0$$

$$x_1'G = \frac{S_2'}{A} = \frac{4es \cdot e}{8es} = \frac{e}{2}$$

• Applico JOURAWSKY

$$J_T = -\frac{T}{I_1} S_1(A^*) \frac{1}{s}$$

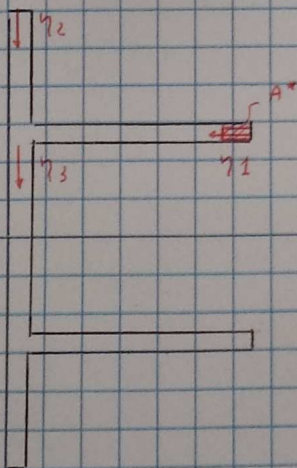
$$I_1 = \frac{1}{12} s (4e)^3 + 2 \left[\frac{1}{12} 2e s^3 + 2es \cdot e^2 \right]$$

$$= \frac{1}{12} 64 s e^3 + 4 s e^3 = \left(\frac{16}{3} + 4 \right) s e^3 = \frac{28}{3} s e^3$$

DISTANZA BARICENTRO A^* DA 1

[71]

$$S_1(A^*) = -\overbrace{\eta_1}^{A^*} s e = \begin{cases} \eta_1 = 0 \rightarrow S_1 = 0 \\ \eta_1 = 2e \rightarrow S_1 = -2e s \end{cases}$$



$$J_T = -\frac{3}{28} \frac{T}{s e^3} (-\eta_1 s e) \cdot \frac{1}{s} =$$

$$\eta_1 = 0 \quad J_T = 0$$

$$\eta_1 = 2e \quad J_T = \frac{3}{28} \frac{T}{s e^3} 2e^2 s \rightarrow J_T = \frac{3}{14} \frac{T}{s e}$$

Va linearmente da 0 a $\uparrow$

[72]

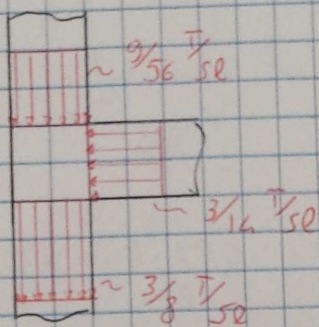
$$S_1(A^*) = -\eta_2 s \cdot (2e - \eta_2 \frac{e}{2})$$

$$J_T = -\frac{3}{28} \frac{T}{s e^3} (-\eta_2 s (2e - \eta_2 \frac{e}{2})) \cdot \frac{1}{s} \quad \eta_2 = 0 \quad J_T = 0$$

$$\eta_2 = e \rightarrow J_T = -\frac{3}{28} \frac{T}{s e^3} (-e s \cdot \frac{3}{2} e) \cdot \frac{1}{s} = + \frac{9}{56} \frac{T}{s e}$$

Va parabolicamente
da 0 a $\searrow$

Analisi del nodo



Dall'analogia idrodinamica

$$\tau = \left(\frac{3}{16} + \frac{9}{56} \right) \frac{T}{se} = \frac{21}{56} \frac{T}{se} = \underline{\underline{\frac{3}{8} \frac{T}{se}}}$$

η_3

$$S_1(A^*) = -\eta_{35} \cdot (e - \eta_{3/2})$$

$$\tau_T = -\frac{3}{28} \frac{T}{se^3} (-\eta_{35}(e - \eta_{3/2}))^{1/2}$$

$$\eta_3 = 0 \quad \tau_T = 0$$

Parabola lo consente

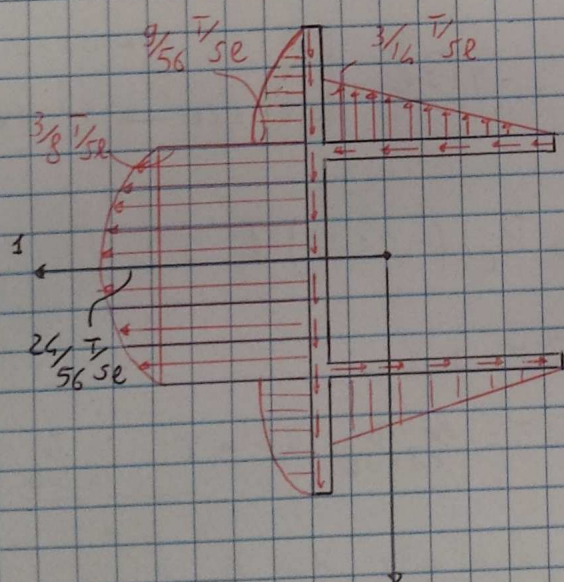
da 0 a

$$\eta_3 = e \quad \tau_T = -\frac{3}{28} \frac{T}{se^3} (-e \cdot e_{1/2})$$

$$\tau_T = \underline{\underline{\frac{3}{56} \frac{T}{se}}}$$

La τ_{max} in corrispondenza dell'asse 1 sarà

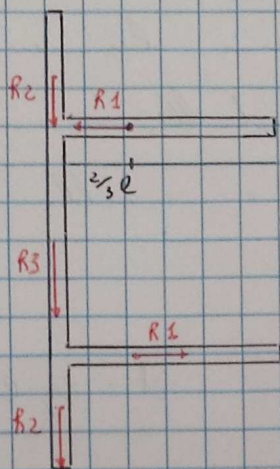
$$\tau_{max} = \frac{3}{8} \frac{T}{se} + \frac{3}{56} \frac{T}{se} = \underline{\underline{\frac{24}{56} \frac{T}{se}}}$$



ANALISI DEL CENTRO DI TAGLIO

Individuo le risultanti delle distribuzioni di τ

Le 3 vanno applicate sul baricentro delle distribuzioni di τ



$$R_1 = \left(\frac{3}{14} \frac{T}{5e} \cdot 2e \right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{14} T$$

$$R_2 = \int_0^e \frac{3T}{28e^3} \cdot \eta_2 (2e - \eta_2) dA$$

$$= \frac{3T}{28e^3} \cdot 5 \int_0^e (2\eta_2 e - \eta_2^2) d\eta = \frac{5}{56} T$$

$$R_3 = \int_0^{2e} \frac{3}{28e^3} \eta_3 (e - \eta_3/2) 5 d\eta + \frac{3}{8} \frac{T}{5e} \cdot 2e$$

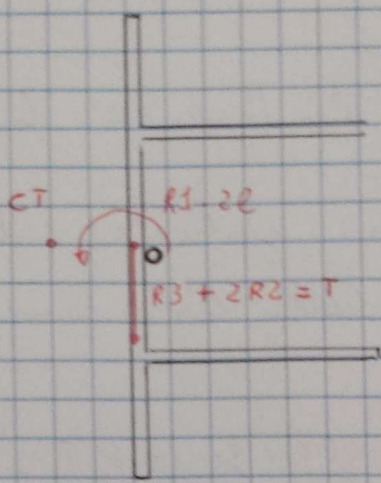
$$= \frac{3}{28} \frac{T}{e^3} \int_0^{2e} \eta_3 e - \eta_3^2/2 d\eta + \frac{3}{4} T = \frac{3}{28} \frac{T}{e^3} \left[\frac{\eta_3^2 e}{2} - \frac{\eta_3^3}{6} \right]_0^{2e} + \frac{3}{4} T$$

$$R_3 = \frac{3}{28} \frac{T}{e^3} \left[2e^3 - \frac{4}{3} e^3 \right] + \frac{3}{4} T = \frac{1}{14} T + \frac{3}{4} T = \frac{23}{28} T$$

VERIFICA BILANCIO FORZE

$$T = R_3 + 2R_2 = \frac{23}{28} T + \frac{5}{28} T = T \quad \text{OK}$$

Le 2 forze R_1 mi danno un momento $\rightarrow$ disegno un sistema equivalente a quello sopra



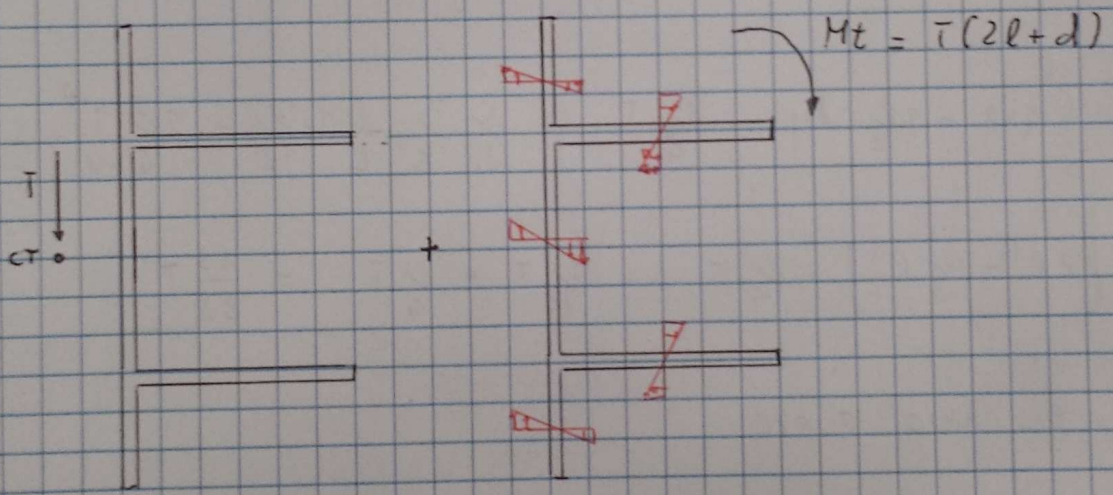
Occorre ora trovare il CENTRO DI TAGLIO, ovvero quel punto per cui la sommatoria dei momenti generati dalle risultanti delle x è nulla

$$(R_3 + 2R_2) \cdot d = R_1 2l$$

$$d = \frac{\frac{3}{14} \bar{x} \cdot 2l}{\bar{x}}$$

$$d = \frac{3}{7} l$$

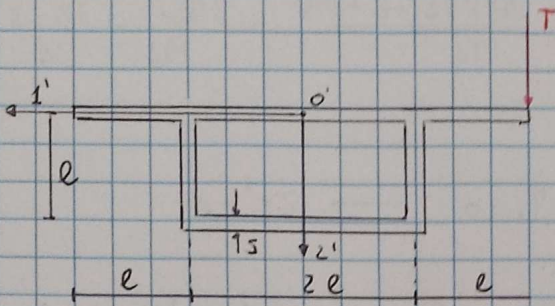
Il sistema in esame si riconduce quindi a



La x che deriva dal momento torcente M_t è

$$x_{M_t} = \frac{3 M_t \cdot S}{5^3 l + 2 \cdot 5^3 2l} \quad \text{da} \quad x_{M_t \max} = \frac{M_t \cdot S}{I_{0A}} \quad \text{con} \quad I_0 = \sum \frac{1}{3} l \cdot b^3$$

Quindi la $x_{TOTALE} = x_{JOURAWSKY} + x_{M_t}$



$$T = 15 \text{ kN}$$

$$e = 10 \text{ cm}$$

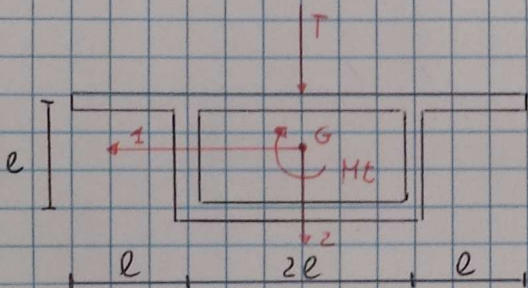
$$s = 1 \text{ mm}$$

$$\sigma_{AMM} = 240 \text{ MPa}$$

Posiziono il sistema $s'z'o'$ e calcolo il baricentro

$$x_{1'G} = 0$$

$$x_{2'G} = S_{1'A} = \frac{2 \cdot e \cdot s \cdot \frac{e}{2} + 2e \cdot s \cdot e}{8es} = \frac{3}{8}e$$



• Analisi sollecitazioni

Applico T sul centro di taglio che, data la simmetria della sezione cade sull'asse z

Dalla sovrapposizione degli effetti si ottiene

Aggiungo il momento torcente

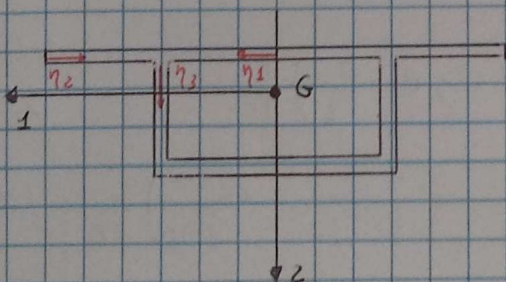
$$M_t = T \cdot 2e$$

$$\tau = \tau_{\text{TAGLIO}} + \tau_{M_t}$$

↑
SOURAWSKY

← CALCOLATE CON FORMULE
RELATIVE ALLA TORSIONE DI
SEZIONI MISTE

• Calcolo delle τ_{TAGLIO}



Formula di SOURAWSKY

$$\tau_T = - \frac{T}{I_1} \cdot \frac{S_1(A^*)}{s} \quad \text{Momento statico di } A^*$$

$$I_1 = \left[\frac{1}{12} \cdot 4es^3 + 4es \cdot \left(\frac{3}{8}e\right)^2 \right] + \left[2 \cdot \frac{1}{12} se^3 + 2 \cdot es \cdot \left(\frac{e}{2} - \frac{3}{8}e\right)^2 \right] + \left[\frac{1}{12} e s^3 + 2es \left(\frac{5}{8}e\right)^2 \right]$$

$$I_1 = 625 \cdot \frac{9}{64} e^2 + \frac{1}{6} 5e^3 + \frac{1}{32} 5e^3 + \frac{25}{32} 5e^3$$

$$= \left[\frac{18}{32} + \frac{1}{6} + \frac{1}{32} + \frac{25}{32} \right] 5e^3 = \frac{108 + 32 + 6 + 150}{192} = \frac{296}{192} = \frac{37}{24} 5e^3$$

$$S_1(\eta_1) = -\eta_1 5 \left(\frac{3}{8} e \right)$$

$$\eta_1 = 0 \rightarrow \tau_1^1 = 0$$

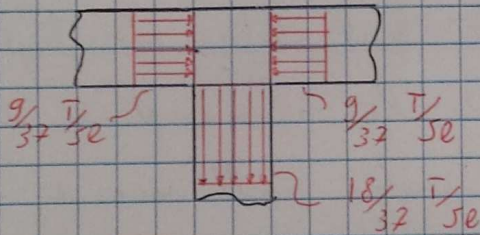
$$\tau_{\text{TAGLIO}}^1 = -\frac{24}{37} \frac{T}{5e^3} \left(-\eta_1 5 \frac{3}{8} e \right) = \eta_1 = e \rightarrow \tau_1^1 = \frac{24}{37} \frac{T}{5e} \cdot \frac{3}{8} = \frac{9}{37} \frac{T}{5e}$$

$$S_1(\eta_2) = -\eta_2 5 \left(\frac{3}{8} e \right)$$

$$\eta_2 = 0 \rightarrow \tau_2^2 = 0$$

$$\tau_{\text{TAGLIO}}^2 = -\frac{24}{37} \frac{T}{5e^3} \left(-\eta_2 5 \frac{3}{8} e \right) = \eta_2 = e \rightarrow \tau_2^2 = \frac{9}{37} \frac{T}{5e}$$

• Analisi del nodo con analogia idrodinamica



$$S_1(\eta_3) = -\eta_3 5 \left(\frac{3}{8} e - \eta_3 \frac{e}{2} \right)$$

$$\tau_{\text{TAGLIO}}^3 = \frac{18}{37} \frac{T}{5e} + \left[-\frac{24}{37} \frac{T}{5e^3} \eta_3 5 \left(-\frac{3}{8} e + \eta_3 \frac{e}{2} \right) \right] =$$

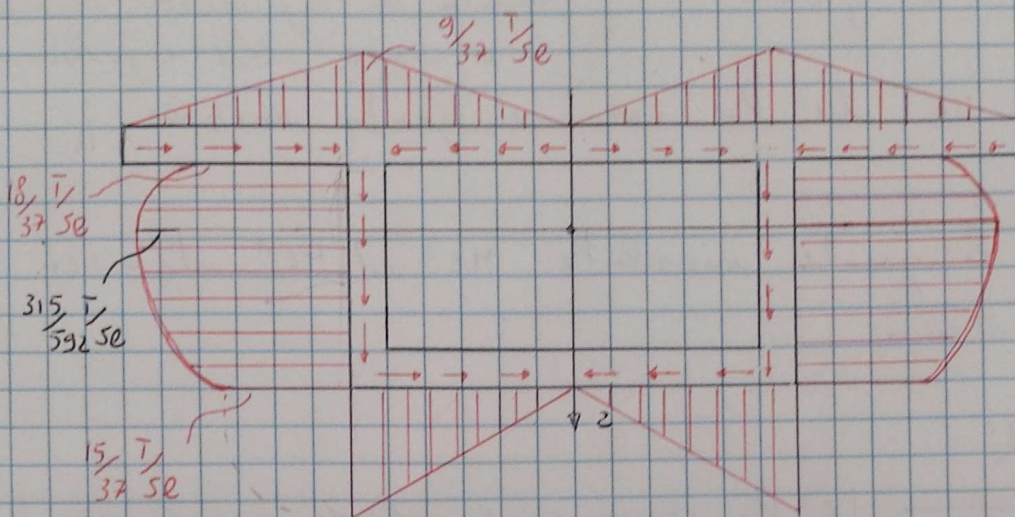
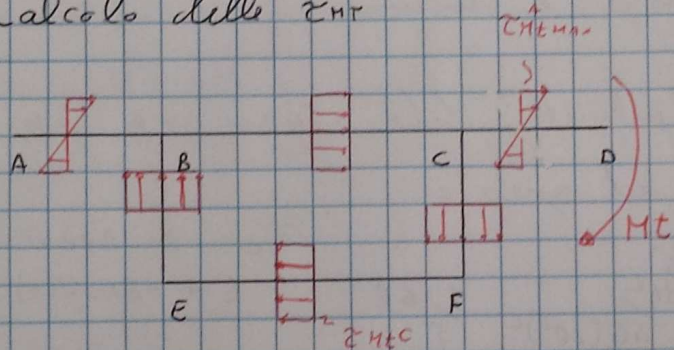
$$\eta_3 = \frac{3}{8} e \rightarrow \tau_3^3 = \frac{18}{37} \frac{T}{5e} + \left[-\frac{24}{37} \frac{T}{5e^3} \frac{3}{8} e \cdot \left(-\frac{3}{16} e \right) \right]$$

$$= \frac{18}{37} \frac{T}{5e} + \frac{24}{37} \cdot \frac{9}{128} \frac{T}{5e} = \left(\frac{18}{37} + \frac{27}{592} \right) \frac{T}{5e} = \frac{315}{592} \frac{T}{5e}$$

$$\eta_3 = e \rightarrow \tau_3^3 = \frac{18}{37} \frac{T}{5e} + \left[-\frac{24}{37} \frac{T}{5e^3} e \cdot \left(-\frac{3}{8} e + \frac{e}{2} \right) \right]$$

$$= \frac{18}{37} \frac{T}{5e} - \frac{24}{37} \frac{T}{5e} \cdot \frac{1}{8} = \left(\frac{18}{37} - \frac{24}{296} \right) \frac{T}{5e} = \frac{120}{296} \frac{T}{5e} = \frac{15}{37} \frac{T}{5e}$$

Schema e valori delle tensioni

• Calcolo delle τ_{MT} 

Concludo ora la
sezione idealmente
suddivisa in 2 parti

- PARTI 1: sezione CHIUSA BCFE; su questa agisce una
tensione tangenziale (della τ_{Mt^c}) che lungo
lo spessore è data dalla formula di
Bredt $\tau_{Mt^c} = \frac{Mt^c}{2A_{0S}}$

A_0 : area racchiusa dalla linea media ($A_0 = 20^2$)

Mt^c : quota di Mt che la sezione chiusa
assorbe

- PARTI 2: sezioni aperte AB e CD; su di queste agisce
una tensione tangenziale τ_{Mt^a} variabile
linearmente lungo lo spessore e con
valore MAX pari a $\tau_{Mt^a}^{max}$

$$\tau_{M_t^A} \max = M_t^A \frac{s}{I_0^A}$$

$$I_0^A = \sum \frac{1}{3} b \cdot b^3 = \frac{1}{3} 2l s^3$$

M_t^A quota di M_t che la sezione aperta assorbe

in tutto
solo la l
totale
dei rettangoli

NB q: fattore di torsione
che tiene conto della
perdita di rig. diretta terminale
a causa dell'inglobamento

Per calcolare le quote assorbite M_t^C ed M_t^A utilizzo il
seguente sistema

$$\begin{cases} M_t = M_t^A + M_t^C \\ \theta^C = \theta^A \end{cases}$$

è la congruenza degli angoli unitari
di torsione nel piano delle 2 parti
aperte e chiuse

Utilizzo le eq. costitutive della torsione per le
sezioni sottili chiuse ed aperte

$$\theta^C = \frac{M_t^C}{G G A_0^2} \int_{BCDF} \frac{dl}{s} = \frac{M_t^C}{4G(2l^2)^2} \frac{1}{s} 6l$$

2^a DI BREOT
(A MEMORIA)

$$\theta^A = \frac{3M_t^A}{G 2l s^3} = \frac{3M_t^A}{G 2l s^3}$$

Quanto perché la
rig. diretta della parte
chiusa è 1/3 di quella
aperta

$$\rightarrow \begin{cases} M_t = M_t^A + M_t^C \\ \frac{3M_t^A}{G 2l s^3} = \frac{3M_t^C l}{8G l^2 s l^2} \end{cases} \rightarrow M_t^A = \frac{s^2}{4l^2} M_t^C \quad (M_t^A \ll M_t^C)$$

$$M_t = \frac{s^2}{4l^2} M_t^C + M_t^C$$

$$M_t = M_t^C \left(\frac{s^2}{4l^2} + 1 \right) = M_t^C \left(\frac{s^2 + 4l^2}{4l^2} \right)$$

$$M_t^C = \frac{4 M_t l^2}{4l^2 + s^2}$$

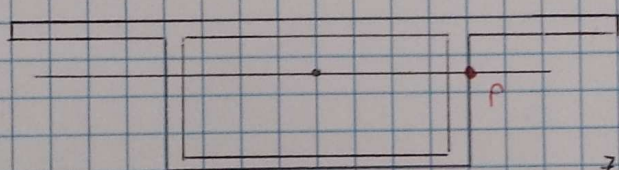
$$M_t^A = \frac{M_t s^2}{4l^2 + s^2}$$

Sostituendo nelle formule precedenti:

$$\sigma_{Mt^c} = \frac{M t \ell^2}{4\ell^2 + s^2} \cdot \frac{1}{4\ell^2 s} = \frac{T 2\ell}{(4\ell^2 + s^2)s} = 7.48 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{Mt^{\frac{A}{\max}}} = \frac{M t s^2}{4\ell^2 + s^2} \cdot \frac{3.5}{2\ell s^3} = \frac{T 2\ell}{4\ell^2 + s^2} \cdot \frac{3}{2\ell} = 1.12 \text{ MPa}$$

• Verifica del punto più sollecitato



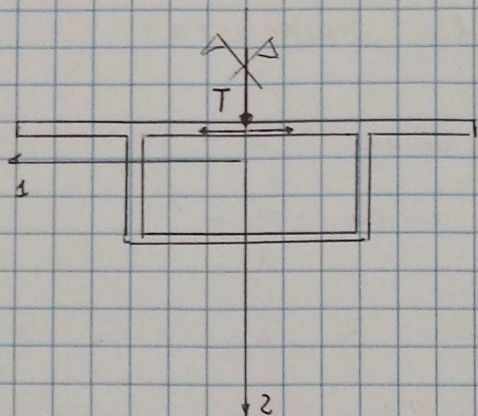
P è il punto più sollecitato

$$\sigma_{eq} = \sqrt{3} \sigma(P) = \sqrt{3} \left[\overbrace{\left(\frac{315}{592} \cdot \frac{T}{s\ell} \right)}^{7.98} + \overbrace{\left(\frac{T 2\ell}{(4\ell^2 + s^2)s} \right)}^{7.48} \right] = 26.78 \text{ MPa}$$

† DERIVA DA VON MISES

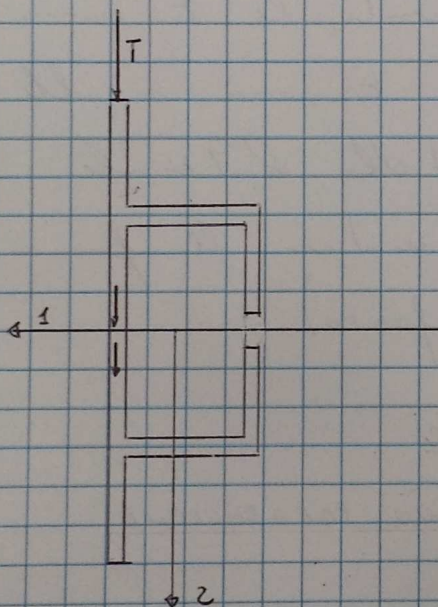
$$26.78 < 240 \text{ MPa}$$

VERIFICATO

SUGGERIMENTI

Si osserva infatti che
per rapporti le τ
in direzione 3 si sommano

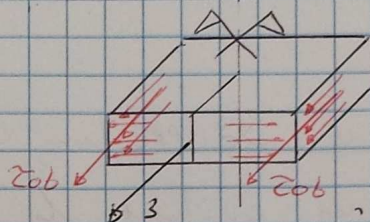
→ il "cassa" è in equilibrio se e solo se
le τ in quel punto sono nulle



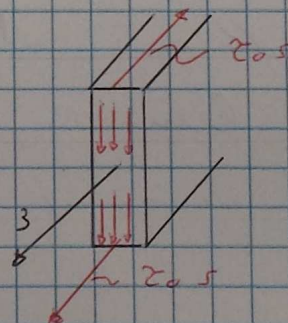
Si osserva che il cassa
è equilibrato
→ le τ ci sono

Prima di partire con
STURAWSKY

- Applicando T sull'asse di
SIMMETRIA della figura ovvio
che τ nulle in quel punto



- Se T è applicato $\perp$ all'asse
di simmetria della struttura
le τ non solo non sono
nulle, bensì raggiungono
il valore max



In caso di dubbio sul verso delle τ secondo analogia idrodinamica la risposta la dà JOURAWSKY

$$\tau = - \frac{T_z}{I_1} \frac{S_1(A^*)}{S} \quad \left(\begin{array}{l} T_z \text{ più meno } + \text{ o } - \\ S_1 \text{ più meno } + \text{ o } - \end{array} \right)$$

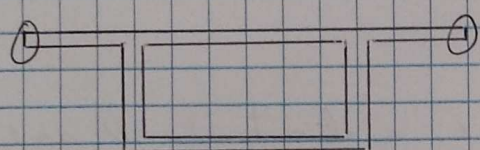
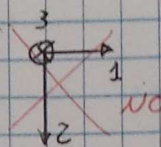
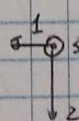
Se quando risolvo ottengo una τ positiva significa che le τ hanno il verso di η_1

NB: prendere SEMPRE in SR DESTROSO

questo per evitare di avere ∇

in compressione positiva

con NAVIER



In questi punti le τ sono 0
perché le τ sono nulle
sul mantello laterale

(non ho mantello fisso da
un da sforzo)

- Sui tratti $\perp$ a T le τ SONO LINEARI
- Sui tratti $\parallel$ a T ed inclinati SONO PARABOLICHE
- Vale l'equilibrio ai nodi
- Le τ sono maxime sulla fibra neutrale

Tenendo a mente questi suggerimenti si è in grado
di stimare gli andamenti delle τ e di utilizzare
JOURAWSKY solo per i valori notevoli