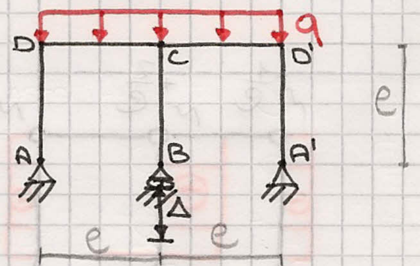
# 7ª ESERCITAZIONE

Con il metodo delle forze risolvere le seguenti travature iperstatiche, disegnare i diagrammi quotati di (M,T,N) e calcolare gli spostamenti o le rotazioni nei punti indicati.

## Esercizio 1



$l = 5\,m$ ; $q = 2T/m$

Cedimento vincolare in B : $\Delta = 1\,cm$

$E = 350.000\ kg/cm^2$

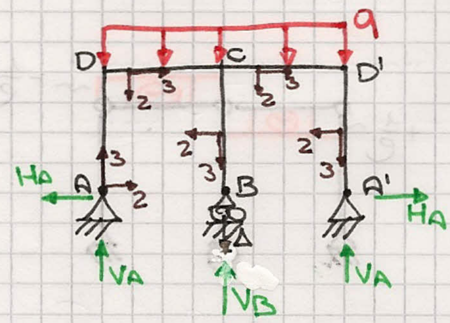
$I_1 = 8356\ cm^4$

Si trascurino le def. assiali

$\varphi_A = ?$

### Svolgimento

Per ragioni di simmetria, le reazioni vincolari sono disposte in modo simmetrico.

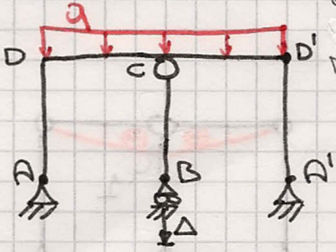


① Eq. cardinali della statica:

$$\begin{cases} H_A - H_A = 0 \longrightarrow H_A = H_A \\ 2V_A + V_B = 2ql \longrightarrow V_B = 2ql - 2V_A \quad (*) \\ (B)\ V_A l - V_A l = 0 \longrightarrow V_A = V_A \end{cases}$$

La travatura è due volte iperstatica (le incognite sono $V_A$; $V_B$; $H_A$ e l'unica relazione utile è la (*))

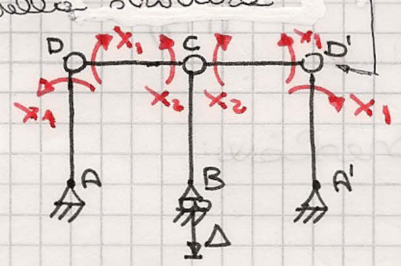
Osservazione: Essendo il pilastro centrale sollecitato solo a sforzo normale, la struttura in esame è staticamente equivalente a quella di seguito rappresentata.



(Si noti la cerniera SOTTO il nodo C)

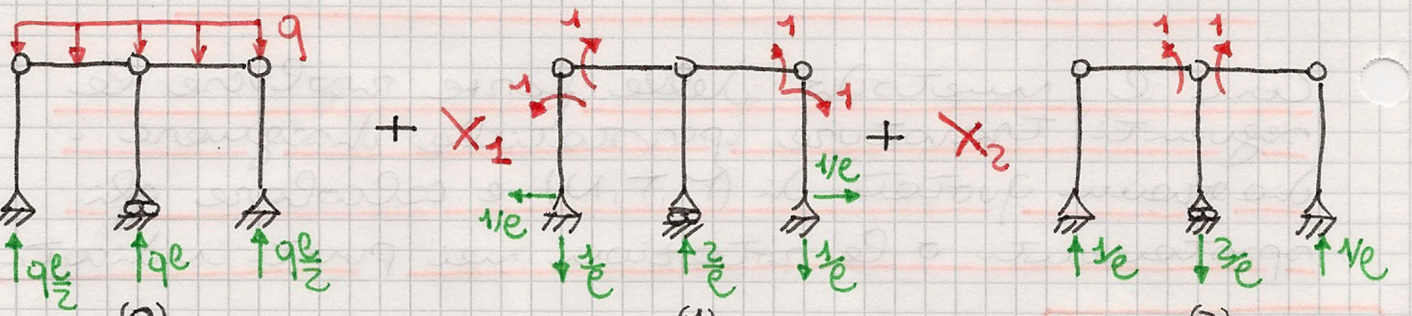
② Una soluzione possibile per la struttura avviene inserendo le cerniere nel nodo C, nel nodo D e per simmetria nel nodo D'. Si fissano, come incognite iperstatiche, il momento flettente in D (e per simmetria in D') e quello in C, sulla trave orizzontale.

cerniera inserita in D' per garantire la simmetria della struttura



Se la struttura iniziale è simmetrica devono essere simmetrici sia i sistemi ausiliari (1,2) che quello isostatico (0)

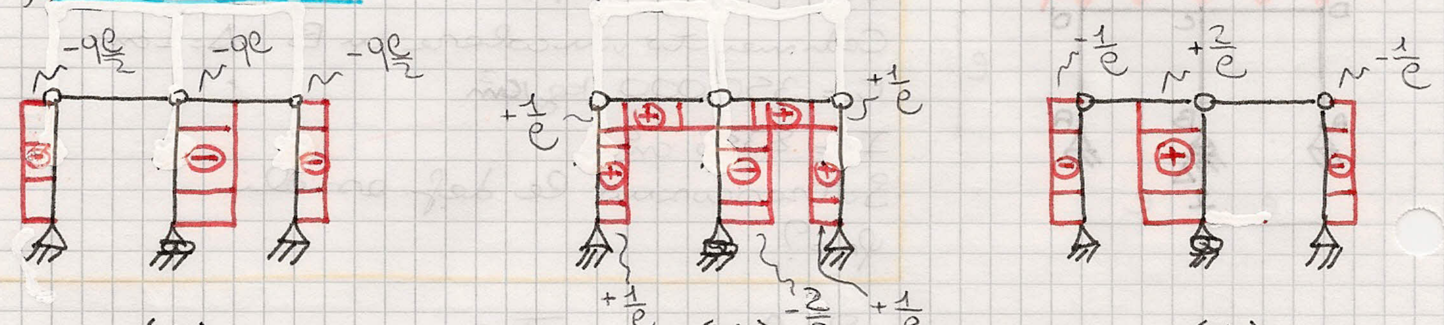
Esse è così scomponibile:



(0) SISTEMA ISOSTATICO + $X_1$ (1) SISTEMA AUSILIARIO + $X_2$ (2) SISTEMA AUSILIARIO

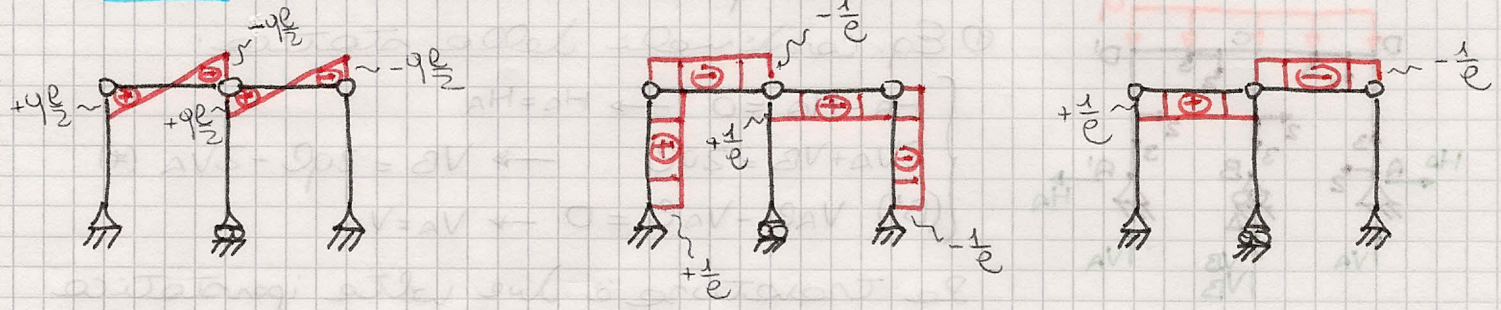
③ Sviluppo dei diagrammi di sollecitazione:

a) SFORZO NORMALE



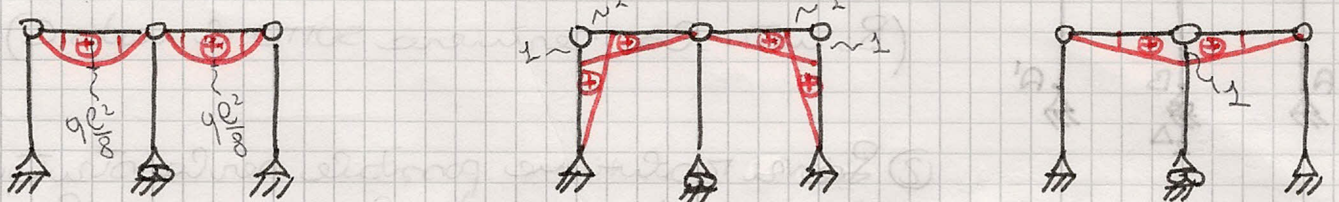
($N_0$) ($N_1$) ($N_2$)

b) TAGLIO



($T_0$) ($T_1$) ($T_2$)

c) MOMENTO FLETTENTE



($M_0$) ($M_1$) ($M_2$)

④ Equazioni di Müller-Breslau:

Avendo 2 sistemi ausiliari (1, 2) le equazioni di Muller sono 2 $\mapsto$

$$\begin{cases} \eta_{10} + x_1 \eta_{11} + x_2 \eta_{12} = \eta_1 \\ \eta_{20} + x_1 \eta_{21} + x_2 \eta_{22} = \eta_2 \end{cases}$$

Con $\eta_1$ e $\eta_2$ coefficienti che rappresentano il lavoro delle forze esterne, agenti rispettivamente in 1 e in 2, per gli spostamenti nella travatura iperstatica.

Essi valgono:

cedimento in B

$$\eta_1 = \overset{N_1}{-\frac{2\Delta}{\ell}}$$

$$\eta_2 = \overset{N_2}{\frac{2\Delta}{\ell}}$$

cedimento in B

⑤ Coefficienti $\eta_{i0}$:

2 perché ci sono due tratti con gli stessi andamenti

$$\eta_{10} = \frac{1}{EI_1}\int_{TRAV.} M_1 M_0 \, dx_3 = \frac{2}{EI_1}\int_0^{\ell} \underbrace{\left(q\frac{\ell}{2}x_3 - q\frac{x_3^2}{2}\right)}_{M_0} \underbrace{\frac{x_3}{\ell}}_{M_1} dx_3 = \frac{q\ell^3}{12EI_1}$$

$$\eta_{20} = \eta_{10}$$

$$\eta_{11} = \frac{4}{EI_1}\int_0^{\ell} \overbrace{\left(\frac{x_3}{\ell}\right)^2}^{M_1^2} dx_3 = \frac{4\ell}{3EI_1}$$

$$\eta_{22} = \frac{2}{EI_1}\int_0^{\ell} \overbrace{\left(\frac{x_3}{\ell}\right)^2}^{M_2^2} dx_3 = \frac{2\ell}{3EI_1}$$

$$\eta_{12} = \frac{2}{EI_1}\int_0^{\ell} \underbrace{\frac{x_3}{\ell}}_{M_2} \underbrace{\left(1-\frac{x_3}{\ell}\right)}_{M_1} dx_3 = \frac{\ell}{3EI_1}$$

in funzione del sistema di riferimento possiamo anche avere $\frac{x_3}{\ell} = M_1$ e $\left(1-\frac{x_3}{\ell}\right) = M_2$

Sistema risolutivo:

$$\begin{bmatrix} \frac{4\ell}{3EI_1} & \frac{\ell}{3EI_1} \\ \frac{\ell}{3EI_1} & \frac{2\ell}{3EI_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{q\ell^3}{12EI_1} - \frac{2\Delta}{\ell} \\ -\frac{q\ell^3}{12EI_1} + \frac{2\Delta}{\ell} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} X_1 = -\frac{q\ell^2}{28} - \frac{18}{7}\frac{\Delta EI_1}{\ell^2} \\ X_2 = -\frac{3q\ell^2}{28} + \frac{30}{7}\frac{\Delta EI_1}{\ell^2} \end{cases}$$

Con i dati del problema si ottiene: $\begin{cases} X_1 = -2086 \text{ kg m} \\ X_2 = -4856 \text{ kg m} \end{cases}$

⑥ Calcolo delle sollecitazioni TOTALI

(Si sfrutta il principio di sovrapposizione degli effetti)

- Momento flettente

$$M_{(x_3)} = M^{(0)}_{(x_3)} + X_1 M^{(1)}_{(x_3)} + X_2 M^{(2)}_{(x_3)}$$

- Taglio

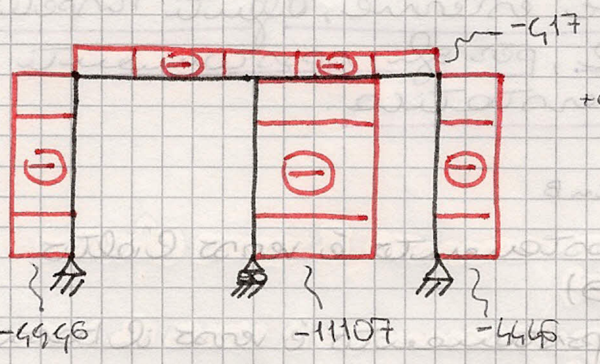
$$T_{(x_3)} = T^{(0)}_{(x_3)} + X_1 T^{(1)}_{(x_3)} + X_2 T^{(2)}_{(x_3)}$$

- Sforzo normale

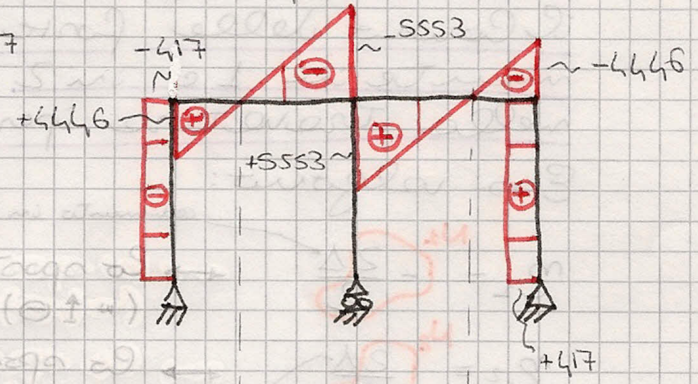
$$N_{(x_3)} = N^{(0)}_{(x_3)} + X_1 N^{(1)}_{(x_3)} + X_2 N^{(2)}_{(x_3)}$$

→ Calcolati, in ogni punto notevole, per la costruzione dei diagrammi finali.

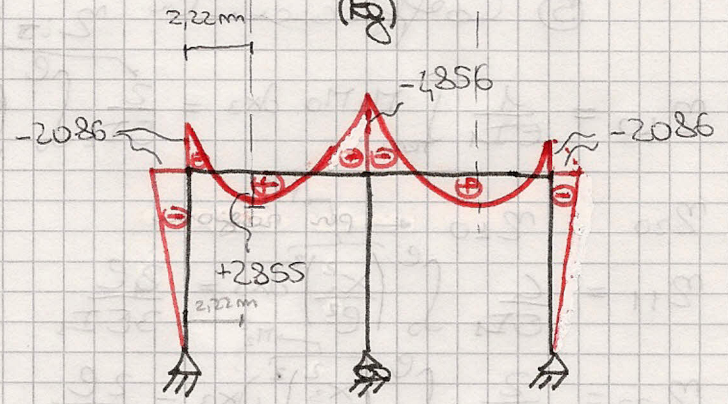
# (7) Grafici totali + quotature




(N) (kg)




(T) (kg)

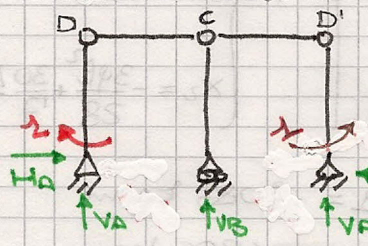



(M) (kg·m)

# (8) Calcolo della rotazione in A

## a) Travatura principale per il calcolo di $\varphi_A$

SISTEMA DI CARICO UNITARIO →




(+ semplice sistema di carico che compie lavoro per lo spostam. (o la rotazione) che si vuol calcolare)

• Calcolo delle reazioni vincolari

$$V_A + V_B + V_{A'} = 0 \Rightarrow V_B = 0$$

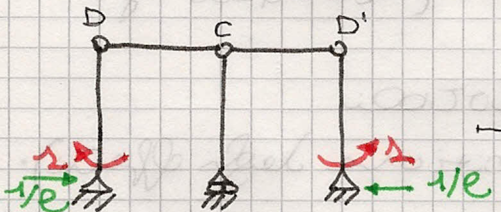
$$H_A = H_{A'} = 1/e$$

$$(D\circlearrowleft)\quad -1 + H_A e = 0 \Rightarrow H_A = 1/e$$

$$(D'\circlearrowleft)\quad -1/e \cdot e + 1 = 0 \quad \boxed{OK}$$

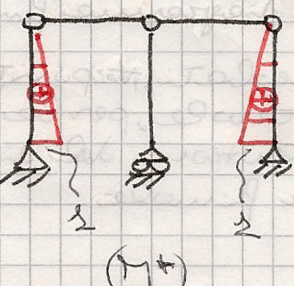
$$(C\circlearrowleft)\quad V_{A'} e - H_{A'} \cdot e + 1 = 0 \Rightarrow V_{A'} e - \frac{1}{e} e - 1 \overset{*}{=} 0 \Rightarrow V_{A'} = 0$$

$$(C\circlearrowleft)\quad -V_A e + H_A e - 1 = 0 \Rightarrow -V_A e + \frac{1}{e} e - 1 \overset{*}{=} 0 \Rightarrow V_A = 0$$




→ Essendo la struttura simmetrica, sia A che A' ruotano, della stessa entità, in modo simmetrico. Per questo motivo anche il sistema di carico unitario deve essere simmetrico.

grafico del momento M*




($M^*$)

## b) Principio dei Lavori virtuali:

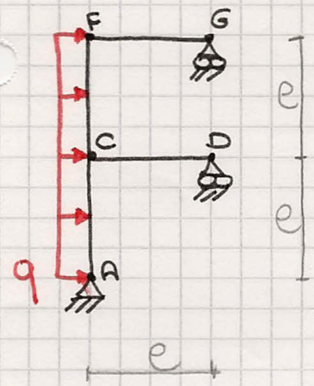
$$L_e = 2\varphi_A$$

essendo simmetrica nella travatura, si genera una rotazione anche in A' della stessa entità $\varphi_A$

$$L_i = 2\int_{AD} \frac{M M^*}{EI_1}\, dx_3 = \frac{2}{EI_1}\int_0^e \underbrace{\left(1-\frac{x_3}{e}\right) X_1}_{M_{TOT} \text{ in } AD} \cdot \overbrace{\frac{x_3}{e}}^{M^*}\, dx_3$$

$$= \frac{2}{EI_1}\left(\frac{1}{6} e X_1\right) \Rightarrow \varphi_A = -0{,}0059 \text{ rad} = -0{,}34°$$

# Esercizio 2



$\ell = 3\,m$ ; $q = 1000\,kg/m$

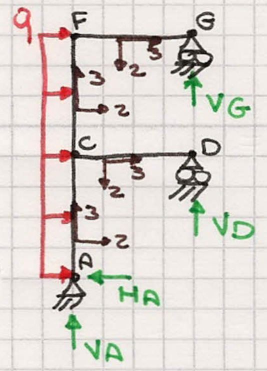
$C = 3\,t\,m$

$E = 2'100000\,kg/cm^2$

$I_z = 7763\,cm^4$

Si trascurino le def. assiali

$V_G = ?$



## Svolgimento

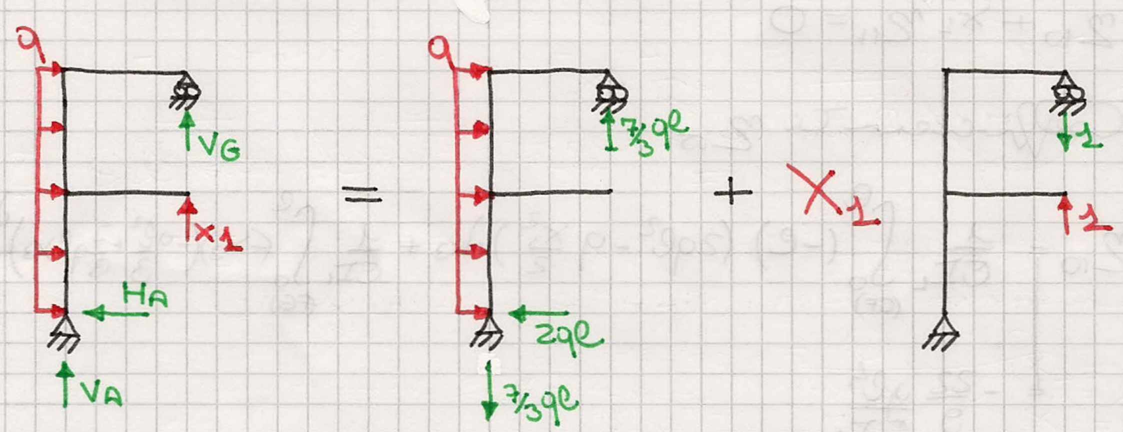
① Eq. cardinali della statica

$$\begin{cases} H_A = 2q\ell \\ (G\circlearrowleft)\ V_A\ell + q\dfrac{\ell^2}{3} - 2q\ell^2 + 4q\ell^2 = 0 \Rightarrow V_A = -\dfrac{7}{3}q\ell \\ V_G + V_D = \dfrac{7}{3}q\ell = -V_A \end{cases}$$

La trave è 1 volta iperstatica

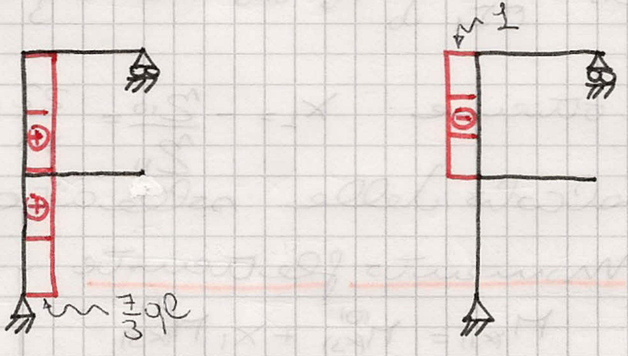
(2 incognite, $V_G$ e $V_D$, legate da una sola relazione)

② Come incognita iperstatica, arbitrariamente scegliamo $V_D$, ottenendo la struttura così decomponibile:



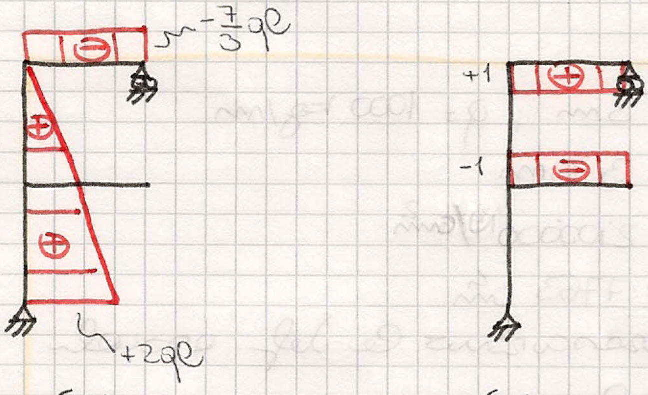
③ Sviluppo dei diagrammi di sollecitazione:

a) SFORZO NORMALE



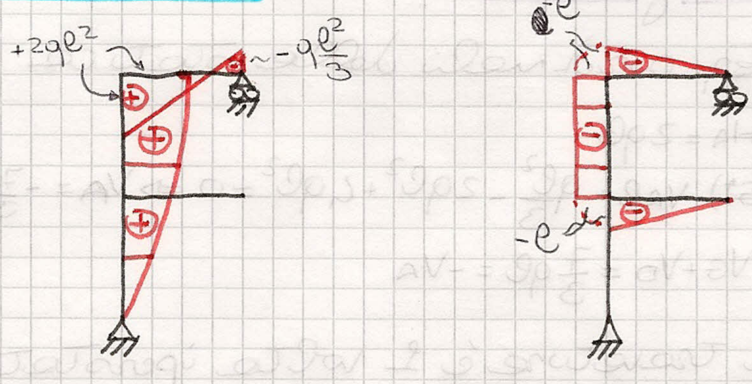
$(N_0)$ $(N_1)$

b) TAGLIO




(T0) (T1)

c) MOMENTO FLETTENTE




(M0) (M1)

④ Equazione di Müller-Breslau

$$\eta_{10} + X_1 \eta_{11} = 0$$

⑤ Coefficienti $\eta_{ij}$

$$\eta_{10} = \frac{1}{EI_1}\int_{0\,(CF)}^{l} (-l)\left(2ql^2 - q\frac{x_3^2}{2}\right)dx_3 + \frac{1}{EI_1}\int_{0\,(FG)}^{l}(-x_3)\left(-q\frac{l^2}{3}+\frac{7}{3}qlx_3\right)dx_3 = -\frac{22}{9}\frac{ql^4}{EI_1}$$

$$\eta_{11} = \frac{2}{EI_1}\int_0^l x_3^2\,dx_3 + l^3 = \frac{5}{3}l^3$$

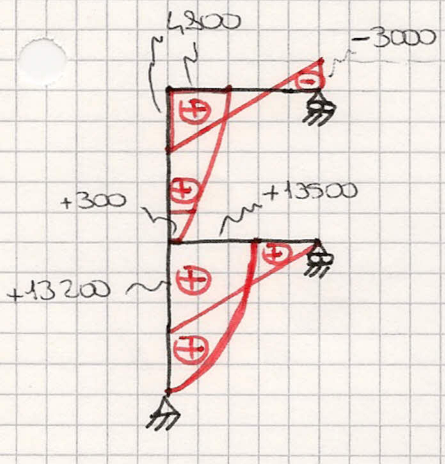
Si ottiene: $X_1 = -\frac{\eta_{10}}{\eta_{11}} = \frac{22}{15}ql = 4400$ kg

⑥ Calcolo delle sollecitazioni totali

- Momento flettente
  $M_{(x_3)} = M^{(0)}_{(x_3)} + X_1 M^{(1)}_{(x_3)}$
- Taglio:
  $T_{(x_3)} = T^{(0)}_{(x_3)} + X_1 T^{(1)}_{(x_3)}$
- Sforzo normale:
  $N_{(x_3)} = N^{(0)}_{(x_3)} + X_1 N^{(1)}_{(x_3)}$

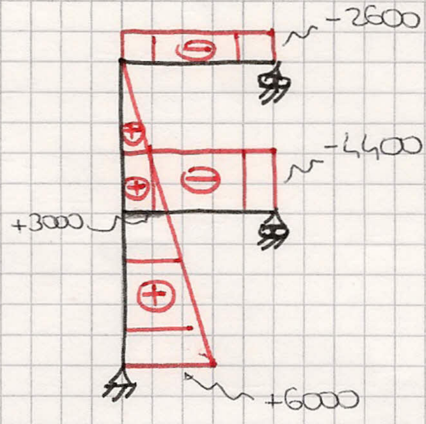
→ Calcolati, in ogni punto notevole, per la costruzione dei diagrammi finali

# 7) Grafici totali + quotature



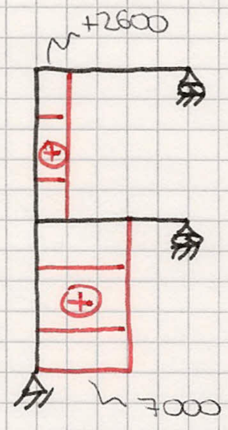

(M)

(kg · m)




(T)

(kg)



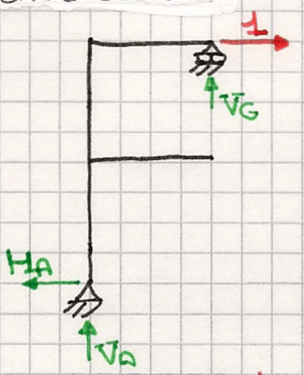

(N)

(kg)

# 8) Calcolo dello spostamento in G ($v_G$)

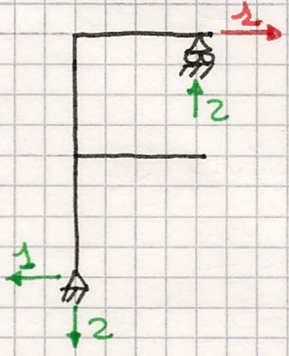
## a) Struttura principale per il calcolo di $v_G$

SISTEMA DI CARICO UNITARIO



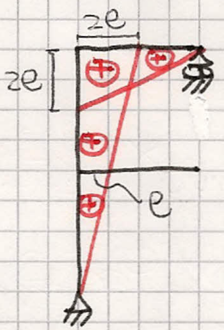

. Calcolo delle reazioni vincolari:

$$\begin{cases} H_A = 1 \\ (A) \quad V_G \cdot \ell - 1 \cdot 2\ell = 0 \Rightarrow V_G = 2 \\ V_G + V_A = 0 \longrightarrow V_A = -V_G = -2 \end{cases}$$




$\Rightarrow$

GRAFICO DI $M^*$




## b) Principio dei lavori virtuali:

forza nel s. isostatico

$$L_E = 1 \cdot v_G = L_i = \frac{1}{EI_1}\left[\int_0^{\ell}(x_3)\left(6000x_3 - 9\frac{x_3^2}{2}\right)dx_3 + \int_0^{\ell}(\ell + x_3)\left(300 \cdot 10^2 + 3000x_3 - 9\frac{x_3^2}{2}\right)dx_3 + \int_0^{\ell}(2\ell - 2x_3)(4800 - 2600x_3)dx_3\right]$$

$v_G = 5,8$ cm