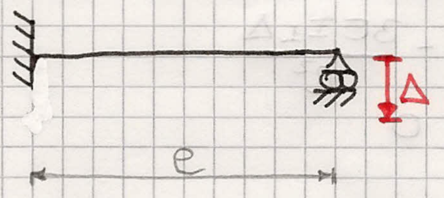
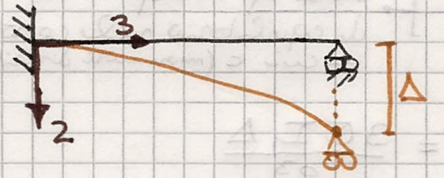
5° ESERCITAZIONE

1 Risolvere con l'equazione della linea elastica le seguenti travature:

Esercizio 1





ESSENDO LA TRAVE IPERSTATICA, I CEDIMENTI INDUCONO DELLE SOLLECITAZIONI

ℓ = lunghetta trave

E = modulo elastico del materiale

I_1 = momento d'inerzia della sezione

Δ = cedimento del vincolo

Svolgimento

1. Inserimento di un s. di riferimento (2,3)
2. Equazione della linea elastica nel caso flessionale

$$\left(E I_1 v''\right)'' = q_2 \quad (v = \text{spostamento verticale})$$

Essendo $q_2 = 0$ in tutta la trave:

$$v^{IV} = 0 \quad \text{in } 0 \div \ell$$

3. Condizioni al contorno:

INCASTRO $(x_3 = 0)$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} v(0) = 0 & \text{(spostamento verticale del punto a } x_3 = 0) \\ v'(0) = 0 & \text{(rotazione del punto a } x_3 = 0) \end{cases}$

CARRELLO $(x_3 = \ell)$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} v(\ell) = \Delta \\ ^{*}\underbrace{-E I_1 v''(\ell)}_{M(x_3=\ell)} = \underbrace{0}_{\text{non ci sono carichi esterni}} \end{cases}$ ← condizione sul momento valutato a $x_3 = \ell$

4. Risoluzione dell'equazione differenziale

$v^{IV} = 0 \longmapsto$

$$v(x_3) = C_3 x_3^3 + C_2 x_3^2 + C_1 x_3 + C_0$$

deriv.

$$v'(x_3) = 3 C_3 x_3^2 + 2 C_2 x_3 + C_1$$

deriv.

$$v''(x_3) = 6 C_3 x_3 + 2 C_2$$

quindi:

$$\begin{cases} v(x_3=0) = C_0 \overset{\text{c. contorno}}{=} 0 \\ v'(x_3=0) = C_1 \overset{\text{c.c.}}{=} 0 \\ ^{*} v''(x_3=\ell) = 6 C_3 \ell + 2 C_2 \overset{\text{c.c.}}{=} 0 \\ \Delta \overset{\text{c.c.}}{=} v(\ell) = C_3 \ell^3 + C_2 \ell^2 \end{cases} \xRightarrow{\text{RISOLVENDO}} \begin{cases} C_0 = 0 \\ C_1 = 0 \\ C_2 = \frac{3}{2} \frac{\Delta}{\ell^2} \\ C_3 = -\frac{\Delta}{2\ell^3} \end{cases}$$

Si ottiene così:

- Spostamento trasversale

$$v(x_3) = \frac{\Delta}{2\ell^3}\left(3\ell x_3^2 - x_3^3\right)$$

Essendo la trave iperstatica i cedimenti inducono delle sollecitazioni.

- Momento flettente

$$M(x_3) = -EI_1 v''(x_3)$$ Equazione costitutiva della flessione.

$$M(x_3) = -\frac{\Delta}{2\ell^3}(6\ell - 6x_3)EI_1$$

x cui $M(0) = -\dfrac{3EI_1\Delta}{\ell^2}$

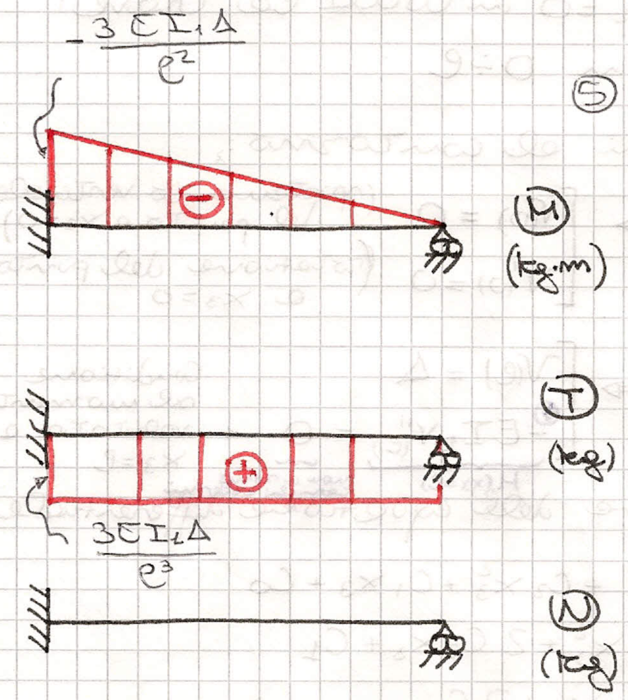
$M(\ell) = 0$

- Sforzo di taglio:

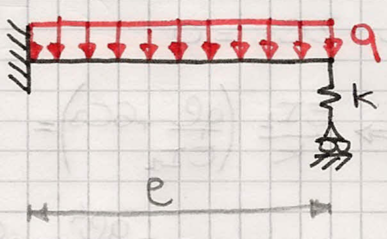
$$T(x_3) = M'(x_3)$$ dall'eq. indefinita di equilibrio nel caso in cui c (momenti distribuiti) = 0

$$T(x_3) = M'(x_3) = \frac{3EI_1\Delta}{\ell^3}$$

⑤ Grafici + quotature



Esercizio 2



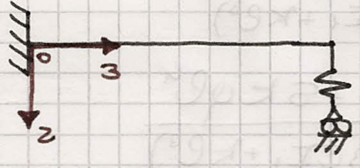
$\ell = 3\,m$

$q = 2000\ kg/m$

$k = 100\ kg/cm$ (rigidezza della molla)

$E = 2{,}1 \cdot 10^6\ kg/cm^2$

$I_1 = 1943\ cm^4$



Svolgimento

① Inserimento di un sistema di riferimento 2,3

② Equazione della linea elastica nel caso flessionale:

$$(E I_1 v'')'' = q_2$$

essendo $q_2 = q \Rightarrow v^{IV} = \dfrac{q}{E I_1}$

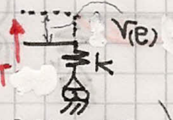
③ Condizioni al contorno

INCASTRO $(x_3 = 0)$ $\Rightarrow \begin{cases} v_{(x_3=0)} = 0 \\ v'_{(x_3=0)} = 0 \end{cases}$

[condizione sul momento valutato a $x_3 = \ell$

CARRELLO $(x_3 = \ell)$ $\Rightarrow$ $- E I_1 v''_{(x_3=\ell)} = 0 \Rightarrow v''_{(x_3=\ell)} = 0$

molla:



(a seguito della presenza della molla si genera una forza di taglio T a $x_3 = \ell$ diretta verso l'alto.)

La molla, a seguito della compressione, reagisce generando una forza di taglio che ha verso opposto rispetto a quello, preso convenzionalmente, positivo.

Sapendo che $T = M'$ allora:

$$T_{(x_3=\ell)} = - E I_1 v'''_{(x_3=\ell)} = F = k \cdot (-v(\ell))$$

Legge della molla

x cui $\quad - E I_1 v'''_{(\ell)} = -k\, v_{(\ell)}$ ← ultima condiz. al contorno

④ Risoluzione dell'equazione differenziale:

$$v^{IV} = \frac{q}{E I_1} \longrightarrow v_{(x_3)} = \frac{q x_3^4}{24 E I_1} + C_3 x_3^3 + C_2 x_3^2 + C_1 x_3 + C_0$$

$$v'_{(x_3)} = \frac{q x_3^3}{6 E I_1} + 3 C_3 x_3^2 + 2 C_2 x_3 + C_1$$

$$v''_{(x_3)} = \frac{q x_3^2}{2 E I_1} + 6 C_3 x_3 + 2 C_2$$

$$v'''_{(x_3)} = \frac{q x_3}{E I_1} + 6 C_3$$

quindi:

$$\begin{cases} v_{(x_3=0)} = C_0 \overset{c.c}{=} 0 \\ v'_{(x_3=0)} = C_1 \overset{c.c}{=} 0 \\ v''_{(x_3=l)} = \dfrac{ql^2}{2EI_1} + 6C_3 l + 2C_2 = 0 \\ -\dfrac{EI_1}{k} v'''_{(x_3=l)} = -v_{(x_3=l)} \Rightarrow \dfrac{EI_1}{k}\left(\dfrac{ql}{EI_1} + 6C_3\right) = \end{cases}$$

$$= \frac{ql^4}{24EI_1} + C_3 l^3 + C_2 l^2$$

Attraverso le ultime due equazioni si ricava che:

$$C_2 = \frac{12EI_1 ql^2 + kql^5}{16EI_1(3EI_1 + kl^3)}$$

$$C_3 = -\frac{24EI_1 ql + 5kql^4}{48EI_1(3EI_1 + kl^3)}$$

Si ottiene così:

- Spostamento trasversale:

$$v(x_3) = \frac{qx_3^4}{24EI_1} + C_3 x_3^3 + C_2 x_3^2$$

- Momento flettente

$$M(x_3) = -EI_1 v''(x_3) = -\frac{qx_3^2}{2} - 6EI_1 C_3 x_3 - 2EI_1 C_2$$

$$M(x_3=0) = -2EI_1 C_2 = -7780 \text{ kgm}$$

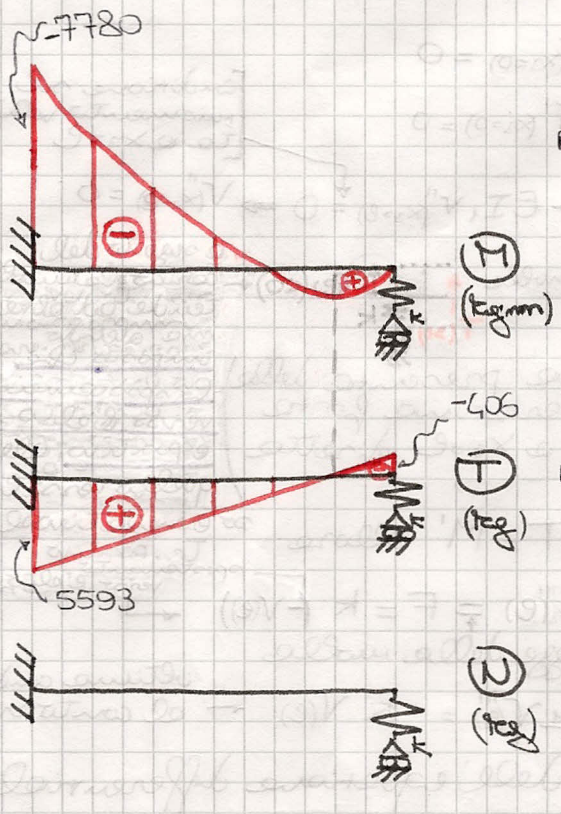
$$M(x_3=l) = -\frac{ql^2}{2} - 6EI_1 C_3 l - 2EI_1 C_2 = 0$$

- Taglio

$$T(x_3) = M'(x_3) = -qx_3 - 6EI_1 C_3$$

$$T(x_3=0) = -6EI_1 C_3 = 5593 \text{ kg}$$

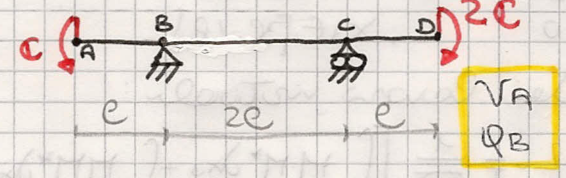
$$T(x_3=l) = -ql - 6EI_1 C_3 = -406 \text{ kg}$$

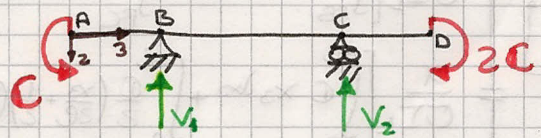


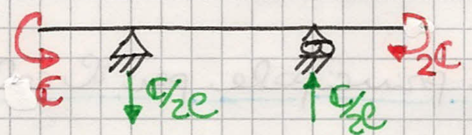
⑤ grafici + quotature

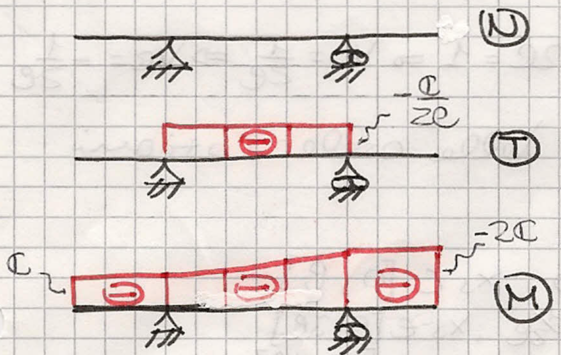
2 Utilizzando il principio dei lavori virtuali, calcolare gli spostamenti indicati

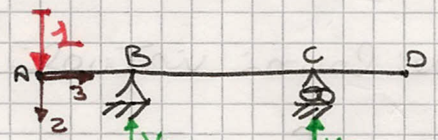
Esercizio 3

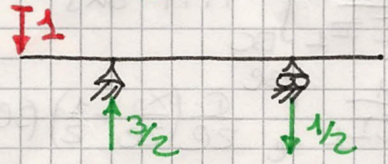












Svolgimento

① Inserimento di un sistema di riferimento (2,3)

② Calcolo delle reazioni vincolari

$$\begin{cases} V_1 = -V_2 \\ (A\circlearrowleft)\quad C + V_1 \cdot l + V_2 \cdot 3l - 2C = 0 \end{cases}$$

risolvendo ottengo: $\begin{cases} V_2 = \dfrac{C}{2l} \\ V_1 = -C/2l \end{cases}$

③ Calcolo delle sollecitazioni

$N(x_3) = 0$

$$T(x_3) = \begin{cases} 0 \ , & x_3 \in [0;l] \\ -C/2l \ ; & x_3 \in [l;3l] \\ 0 \ ; & x_3 \in [3l;4l] \end{cases}$$

$$M(x_3) = \begin{cases} -C \ ; & x_3 \in [0;l] \\ -\frac{C}{2l}x_3 - \frac{C}{2} \ ; & x_3 \in [l;3l] \\ -2C \ ; & x_3 \in [3l;4l] \end{cases}$$

④ Calcolo degli spostamenti e delle rotazioni

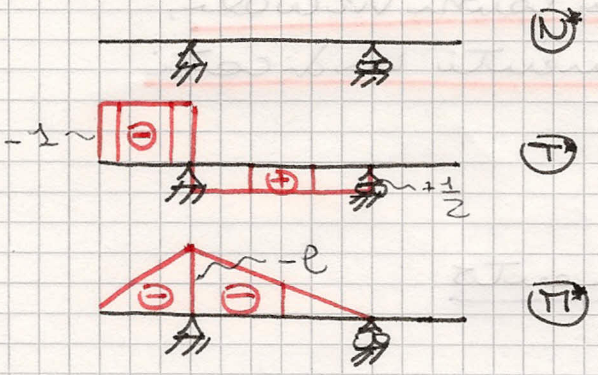
a) Travatura principale per il calcolo di V_A

Scegliamo il più semplice sistema di carico che compie lavoro, per lo spostamento che vogliamo calcolare (sistema di carico unitario)

. Calcolo delle reazioni vincolari

$$\begin{cases} (B\circlearrowleft)\quad V_C \cdot 2l = -1 \cdot l \Rightarrow V_C = -1/2 \\ V_B + V_C = 1 \Rightarrow V_B = 1 - V_C = 1 + \frac{1}{2} = 3/2 \end{cases}$$

• Calcolo delle sollecitazioni:



$$N^*_{(x_3)} = 0$$

$$T^*_{(x_3)} = \begin{cases} -1 & ; x_3 \in [0; e] \\ +\frac{1}{2} & ; x_3 \in [e; 3e] \\ 0 & ; x_3 \in [3e; 4e] \end{cases}$$

$$M^*_{(x_3)} = \begin{cases} -x_3 & ; x_3 \in [0; e] \\ \frac{1}{2}(x_3 - 3e) & ; x_3 \in [\,.\,; 3e] \\ 0 & ; x_3 \in [3e; 4e] \end{cases}$$

• Principio dei lavori virtuali:

forza →

$$1 \cdot V_A = L_e = L_i = \frac{1}{EI_1}\left[\int_{AB} M \cdot M^* \, dx_3 + \int_{BC} M M^* \, dx_3\right]$$

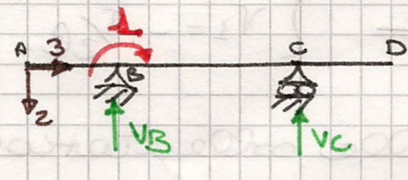
lavoro esterno

lavoro interno

$$= \frac{1}{EI_1}\left[\int_0^e C x_3 \, dx_3 + \int_e^{3e} \frac{C}{2}\left(\frac{x_3}{2e} + \frac{1}{2}\right)(3e - x_3) \, dx_3\right]$$

$$= \frac{1}{EI_1} \frac{11}{6} C e^2$$

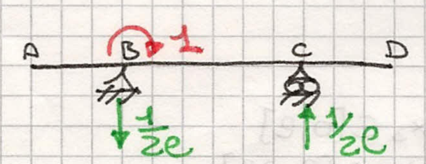
b) Travatura principale per il calcolo di φ_B



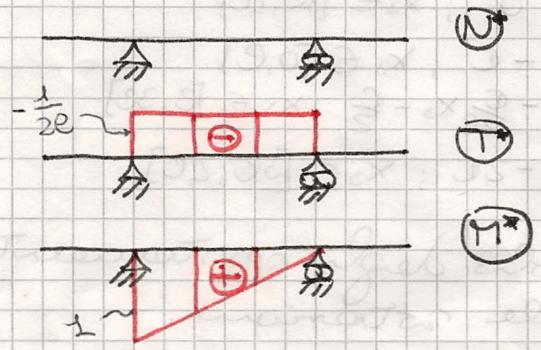
• Calcolo delle reazioni vincolari

$V_C = -V_B$

$(B\circlearrowleft)\quad V_C \cdot 2e = 1 \Rightarrow V_C = \frac{1}{2e} \Rightarrow V_B = -\frac{1}{2e}$



• Calcolo delle sollecitazioni



$$N^*_{(x_3)} = 0$$

$$T^*_{(x_3)} = \begin{cases} 0 & ; x_3 \in [0; e] \\ -\frac{1}{2e} & ; x_3 \in [e; 3e] \\ 0 & ; x_3 \in [3e; 4e] \end{cases}$$

$$M^*_{(x_3)} = \begin{cases} 0 & ; x_3 \in [0; e] \\ -\frac{1}{2e}(x_3 - 3e) & ; x_3 \in [e; 3e] \\ 0 & ; x_3 \in [3e; 4e] \end{cases}$$

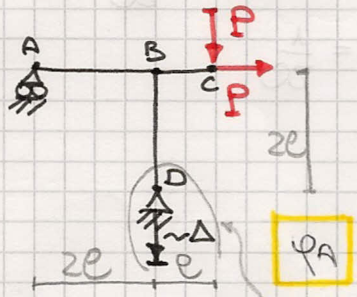
• Principio dei lavori virtuali:

$$1 \cdot \varphi_B = L_e = L_i = \frac{1}{EI_1}\int_{BC} M M^* \, dx_3$$

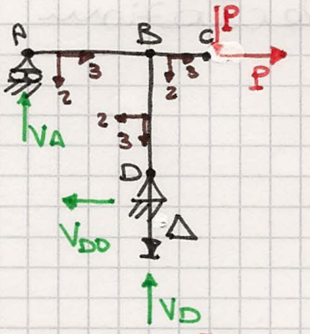
$$= \frac{1}{EI_1}\int_e^{3e} \frac{C}{2e}\left(\frac{x_0}{2e} + \frac{1}{2}\right)(3e - x_3) \, dx_3$$

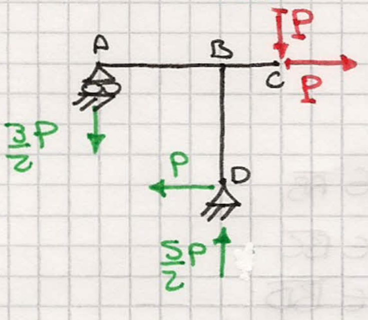
$$= \frac{4Ce}{3EI_1}$$

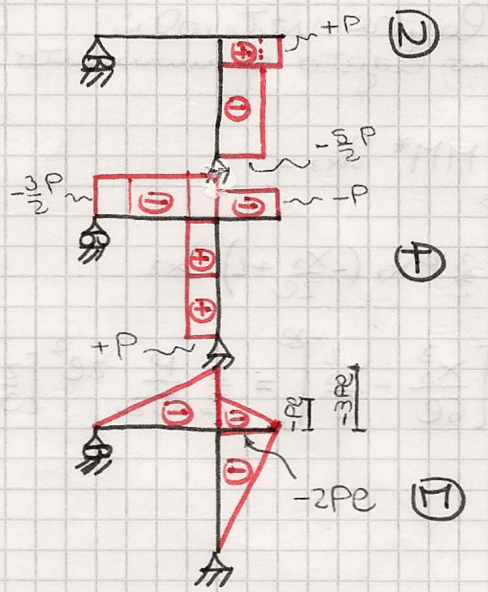
Esercizio 4



Vincolo cedevole (Δ noto)







Svolgimento

① Inserimento di un sistema di riferimento (2,3)

② Calcolo delle reazioni vincolari

$$\begin{cases} V_{DO} = P \\ V_D + V_A = P \\ (A)\ V_D \cdot 2\ell = 3P\ell + V_{DO} \cdot 2\ell \end{cases}$$

Risolvendo ottengo:

$$\begin{cases} V_{DO} = P \\ V_A = -\frac{3}{2} P \\ V_D = \frac{5}{2} P \end{cases}$$

③ Calcolo delle sollecitazioni

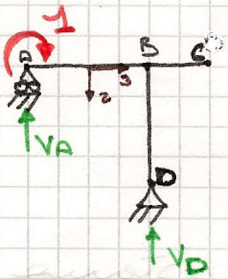
$$N_{(x_3)} = \begin{cases} 0 & ;\ x_3 \in (\overline{AB}) \\ P & ;\ x_3 \in \overline{BC} \\ -\frac{5}{2} P & ;\ x_3 \in \overline{BD} \end{cases}$$

$$T_{(x_3)} = \begin{cases} -\frac{3}{2} P & ;\ x_3 \in \overline{AB} \\ -P & ;\ x_3 \in \overline{BC} \\ +P & ;\ x_3 \in \overline{BD} \end{cases}$$

$$M_{x_3} = \begin{cases} -\frac{3}{2} P x_3 & ;\ x_3 \in \overline{AB} \\ -P x_3 & ;\ x_3 \in \overline{BC} \\ -P x_3 & ;\ x_3 \in \overline{BD} \end{cases}$$

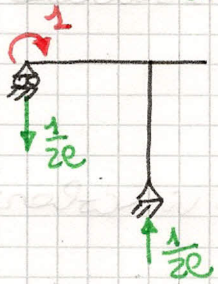
④ Calcolo degli spostamenti e delle rotazioni:

a) Travatura principale per il calcolo di φ_A

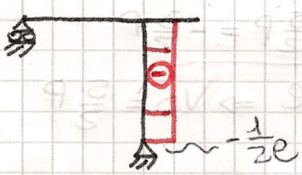


• Calcolo delle reazioni vincolari:

$$\begin{cases} (B\circlearrowleft) \quad \cancel{V_A} -V_A\, 2\ell - 1 = 0 \Rightarrow V_A = -\frac{1}{2\ell} \\ V_A + V_D = 0 \Rightarrow V_D = -V_A = \frac{1}{2\ell} \end{cases}$$

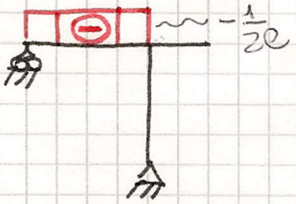


• Calcolo delle sollecitazioni



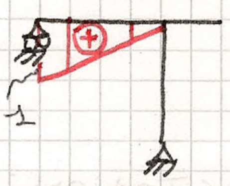
N^*

$$N^* = \begin{cases} 0 & ; x_3 \in \overline{AB} \\ 0 & ; x_3 \in \overline{BC} \\ -\frac{1}{2\ell} & ; x_3 \in \overline{BD} \end{cases}$$



T^*

$$T^* = \begin{cases} -\frac{1}{2\ell} & ; x_3 \in \overline{AB} \\ 0 & ; x_3 \in \overline{BC} \\ 0 & ; x_3 \in \overline{BD} \end{cases}$$



M^*

$$M^* = \begin{cases} -\frac{x_3}{2\ell} + 1 & ; x_3 \in \overline{AB} \\ 0 & ; x_3 \in \overline{BC} \\ 0 & ; x_3 \in \overline{BD} \end{cases}$$

• Principio dei lavori virtuali

La rotazione φ_A è dovuta a due contributi, uno legato al momento in A e l'altro legato al cedimento vincolare.

N^*

$$\underbrace{\Delta\left(-\frac{1}{2\ell}\right)} + 1 \cdot \varphi_A = L_e = L_i = \frac{1}{EI_1}\int_{AB} M M^* \, dx_3 =$$

Lavoro del vincolo cedevole (ad uno spostamento negativo corrisponde una rotazione positiva)

$$= \frac{1}{EI_1}\int_0^{2\ell} -\frac{3}{2} P x_3 \left(-\frac{x_3}{2\ell} + 1\right) dx_3$$

$$= \frac{3}{2}\frac{P}{EI_1}\left[\frac{x_3^3}{6\ell} - \frac{x_3^2}{2}\right]_0^{2\ell} = \frac{3}{\cancel{2}}\frac{P}{EI_1}\cancel{2}\ell^2\left[\frac{2}{3} - 1\right] =$$

$$= -\frac{P\ell^2}{EI_1}$$

x cui:

$$\varphi_A = \frac{\Delta}{2\ell} - \frac{P\ell^2}{EI_1}$$