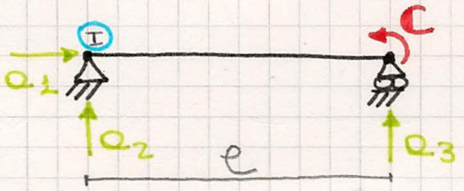
2ª ESERCITAZIONE

A Utilizzando il metodo delle sezioni, disegnare i diagrammi delle azioni interne (N,T,M) nelle seguenti travature isostatiche.

Esercizio 1



$C = 1\ t\cdot m$

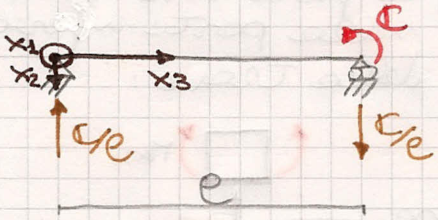
$l = 2\ m$

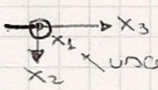
① Equazioni cardinali della statica, per la determinazione delle reazioni vincolari (–):

$$\begin{cases} R_1 = 0 \\ R_2 + R_3 = 0 \\ (I)\ R_3 l + C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_1 = 0 \\ R_2 = +\dfrac{C}{l} = 500\ kg \\ R_3 = -\dfrac{C}{l} = 500\ kg \end{cases}$$

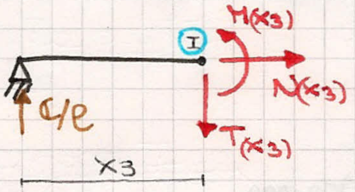
② Applicazione del metodo della sezione.

Tale metodo viene usato per calcolare le caratteristiche delle sollecitazione in ogni punto.



a) Inserimento di un sistema di riferimento, convenzionalmente preso come  uscente dal piano

b) Equazioni cardinali della statica per la porzione di trave $(0; x_3)$



Con N (sforzo normale), T (sforzo di taglio), M (momento flettente), componenti delle azioni interne di ogni punto della trave.

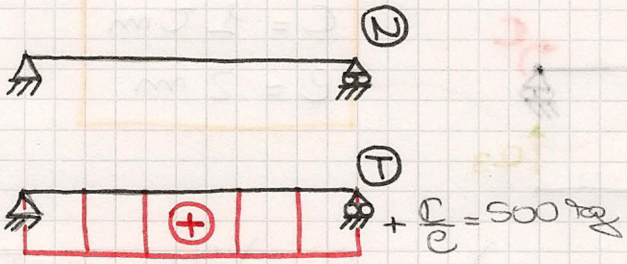
Per la regola del concio i segni delle azioni interne nel punto I, ad una distanza x_3 dall'origine del sistema di riferimento $x_1; x_2; x_3$, sono determinati con la seguente convenzione: 

$$\begin{cases} N(x_3) = 0 \\ T(x_3) - \dfrac{C}{l} = 0 \\ (I) \; M(x_3) - \dfrac{C}{l} \cdot x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N(x_3) = 0 \\ T(x_3) = C/l \\ M(x_3) = \dfrac{C}{l} x_3 \end{cases}$$

c) Costruzione dei diagrammi delle sollecitazioni:

$\boxed{N(x_3) = 0} \Rightarrow$

$\boxed{T(x_3) = \dfrac{C}{l}} \Rightarrow$



N, T sono costanti su tutta la lunghezza della trave in quanto nella loro espressione non vi è alcuna dipendenza dalla coordinata x_3

$\boxed{M(x_3) = \dfrac{C}{l} x_3}$

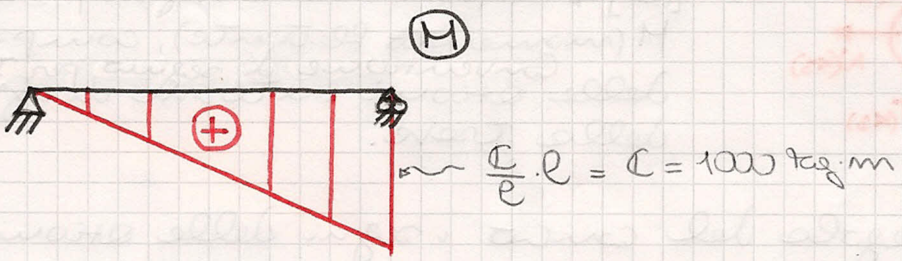
a) $M(x_3)$ ha una dipendenza lineare dalla coordinata x_3

b) $x_3 = 0 \Rightarrow M(x_3) = 0$

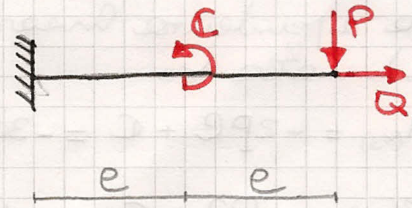
c) $x_3 = l \Rightarrow M(x_3) = C$

d) $M(x_3) > 0 \Rightarrow$ le fibre tese sono nella parte inferiore della trave:

x questo il diagramma si disegna sotto la linea d'asse.



Esercizio 2



$C = 1\,t\cdot m$

$P = 1\,t$

$Q = 500\,kg$

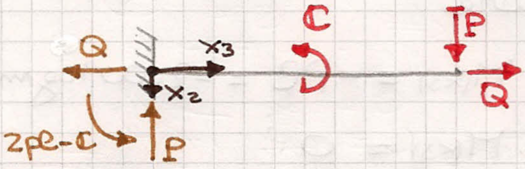
$l = 2\,m$

Svolgimento:

① Equazioni cardinali della statica, per la determinazione delle reazioni vincolari.

$$\begin{cases} Q_1 = -Q = -500\,kg \\ Q_2 = P = 1000\,kg \\ (I)\quad Q_3 = 2Pl - C = 3000\,kg\cdot m \end{cases}$$

② Applicazione del metodo delle sezioni:

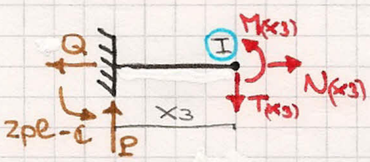


a) Inserimento del sistema di riferimento $(x_2; x_3)$

b) La presenza di una coppia concentrata in $x_3 = l$, porta a dover distinguere due casi:

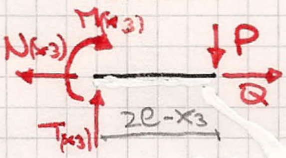
1° caso, $x_3 \in (0, l)$ (x la regola del concio)

E. cardinali della statica:



$$\begin{cases} N(x_3) = Q \\ T(x_3) = P \\ (I^*)\quad M(x_3) = P x_3 - 2Pl + C \end{cases}$$

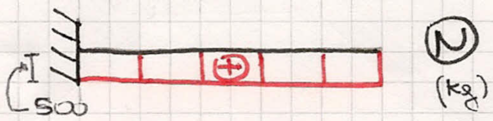
2° caso, $x_3 \in (l, 2l)$ (x la regola del concio)



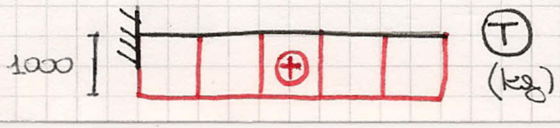
E. cardinali della statica:

$$\begin{cases} N(x_3) = Q \\ T(x_3) = P \\ M(x_3) = P x_3 - P\cdot 2l \end{cases}$$

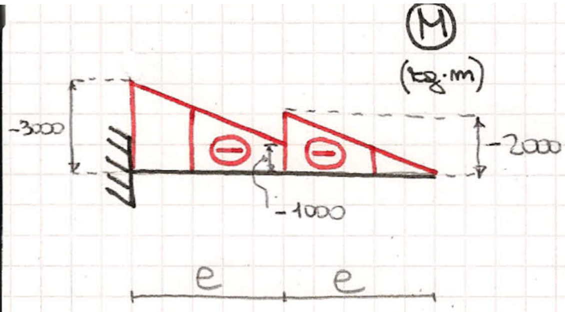
c) Costruzione dei diagrammi



$\boxed{N(x_3) = Q}$ costante su tutta la trave



$\boxed{T(x_3) = P}$ costante su tutta la trave



Analisi dei due casi

1° caso $x_3 \in (0; e)$

$$\boxed{M_{(x_3)} = P x_3 - 2Pe + C}$$

a) $M_{(x_3)}$ ha una dipendenza lineare dalla coordinata x_3

b) $x_3 = 0 \Rightarrow M_{(x_3)} = -2Pe + C = -3000$ kg·m

c) $x_3 = e \Rightarrow M_{(x_3)} = -Pe + C = -1000$ kg·m

d) $M_{(x_3)} < 0 \Rightarrow$ le fibre tese sono nella parte superiore della trave per questo il diagramma si disegna sopra la linea d'asse

2° caso $x_3 \in (e; 2e)$

$$\boxed{M_{(x_3)} = P \cdot x_3 - 2Pe}$$

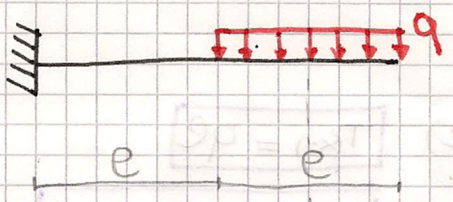
a) $M_{(x_3)}$ lineare

b) $x_3 = e \Rightarrow M_{(x_3)} = -Pe = -2000$ kg·m

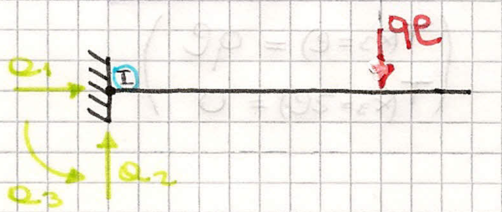
c) $x_3 = 2e \Rightarrow M_{(x_3)} = 0$

d) $M_{(x_3)} < 0 \Rightarrow$ si disegna sopra la linea d'asse

Esercizio 3



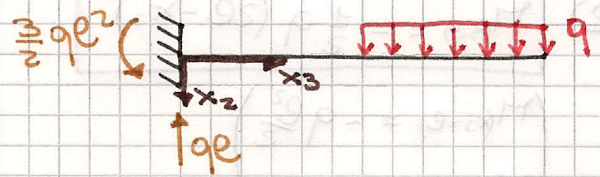
$q = 2000$ kg/m
$\ell = 2$ m



Svolgimento

① Equazioni cardinali della statica

$$\begin{cases} R_1 = 0 \\ R_2 = q\ell = 4000 \text{ kg} \\ (I^*)\ R_3 = \frac{3}{2} q\ell^2 = 12000 \text{ kg}\cdot\text{m} \end{cases}$$

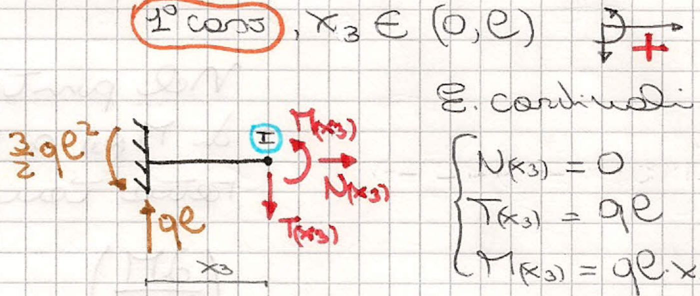


② Applicazione del metodo della sezione:

a) Inserimento del s. di riferimento $(x_2; x_3)$

b) La presenza di un carico distribuito su una parte della trave, porta a dover distinguere due casi:

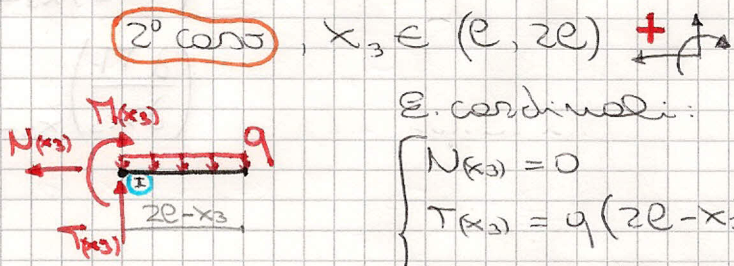
1° caso, $x_3 \in (0, \ell)$



E. cardinali della statica

$$\begin{cases} N(x_3) = 0 \\ T(x_3) = q\ell \\ M(x_3) = q\ell \cdot x_3 - \frac{3}{2} q\ell^2 \quad (I^*) \end{cases}$$

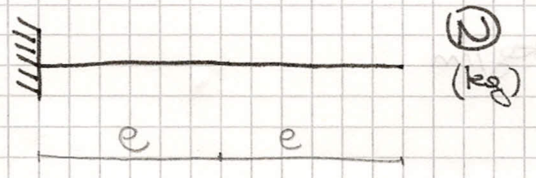
2° caso, $x_3 \in (\ell, 2\ell)$

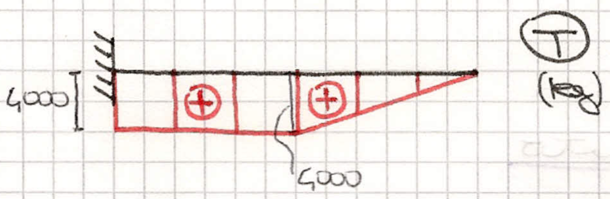


E. cardinali:

$$\begin{cases} N(x_3) = 0 \\ T(x_3) = q(2\ell - x_3) \\ M(x_3) = -q(2\ell - x_3) \cdot \frac{(2\ell - x_3)}{2} \quad (I^*) \end{cases}$$

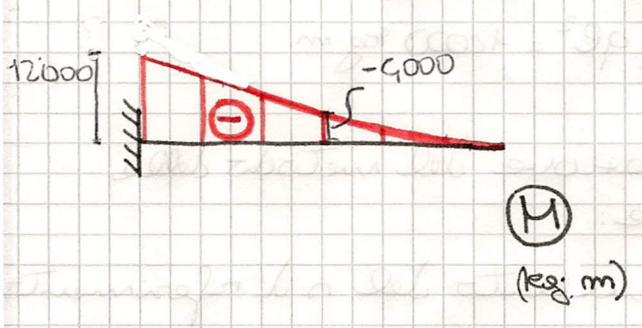
c) Costruzione dei diagrammi





$$\begin{cases} x_3 \in (0;l) & \boxed{T_{(x_3)} = ql} \\ x_3 \in (l;2l) & \boxed{T_{(x_3)} = q(2l - x_3)} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} T(x_3 = l) = ql \\ T(x_3 = 2l) = 0 \end{pmatrix}$$



$x_3 \in (0,l)$ $\boxed{M_{(x_3)} = ql\,x_3 - \frac{3}{2}ql^2}$

andamento lineare

$$\begin{pmatrix} M_{(x_3=0)} = -\frac{3}{2}ql^2 \\ M_{(x_3=l)} = -q\frac{l^2}{2} \end{pmatrix}$$

$x_3 \in (l,2l)$ $\boxed{M_{(x_3)} = -\frac{1}{2}q\,(2l - x_3)^2}$

andamento parabolico

$$\begin{pmatrix} M_{(x_3=l)} = -q\frac{l^2}{2} \\ M_{(x_3=2l)} = 0 \end{pmatrix}$$

$M_{(x_3)}$ ha un andamento parabolico in quanto x_3 è elevato al quadrato

Nel punto $x_3 = l$ i due diagrammi di $M_{(x_3)}$ si raccordano con la stessa retta tangente, infatti:

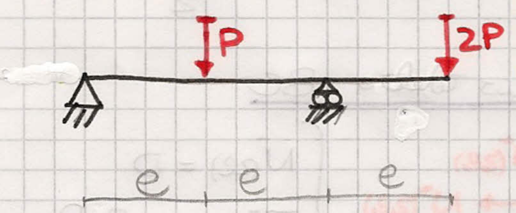
$$\left(\frac{dM}{dx_3}\right)_{x_3 \to l^-} = +ql$$

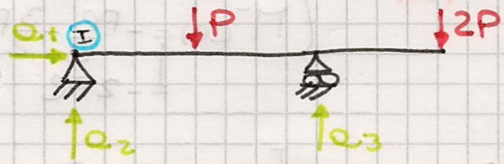
$$\left(\frac{dM}{dx_3}\right)_{x_3 \to l^+} = +ql$$

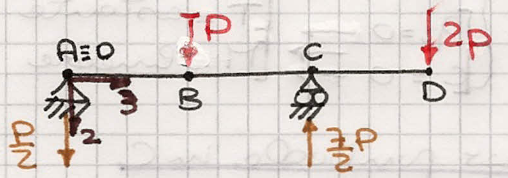
B Utilizzando le equazioni indefinite di equilibrio della trave piana rettilinea, disegnare i diagrammi di (N, T, M) nelle seguenti travature isostatiche

Esercizio 1

$P = 1000\ kg$
$\ell = 2m$







Svolgimento:

① Calcolo delle reazioni vincolari. Equazioni cardinali della statica

$$\begin{cases} R_1 = 0 \\ R_2 + R_3 = 3P \\ (\mathrm{I}^{\circlearrowleft})\ R_3 2\ell = P\ell + 2P \cdot 3\ell \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_1 = 0 \\ R_2 = 3P - R_3 = -500\ kg \\ R_3 = \frac{7}{2}P = 3500\ kg \end{cases}$$

② Denominazione di tutti i nodi (A, B, C, ...)

③ Inserimento di un sistema di riferimento 2;3, con l'asse 3 sempre coincidente con l'asse della trave.

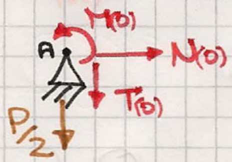
④ Analisi dei tratti

- **Tratto $A\bar{B}$**

$$\begin{cases} q_3 = 0 \rightarrow N \text{ costante} \\ \begin{cases} q_2 = 0 \\ c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} T \text{ costante} \\ M \text{ lineare} \end{cases} \end{cases}$$

(con "q" carichi distribuiti rispettivamente lungo la direzione 2 e 3, e "c" coppie distribuite)

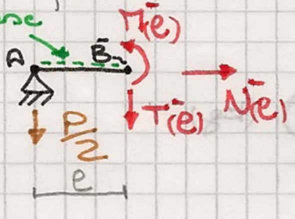
- **Equilibrio puntuale in A**



$$\begin{cases} N(0) = 0 \\ T(0) = -P/2 \\ M(0) = 0 \end{cases}$$

- **Equilibrio tratto $A\bar{B}$**

(Il diagramma si disegna sopra la linea d'asse xké convenzionalmente esso si disegna dalla parte delle fibre tese) ← fibre tese

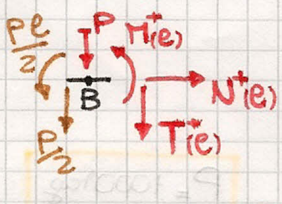


$$\begin{cases} N^-(\ell) = 0 \\ T^-(\ell) = -P/2 \\ M^-(\ell) = -P\ell/2 \end{cases}$$

■ **Tratto B^+C**

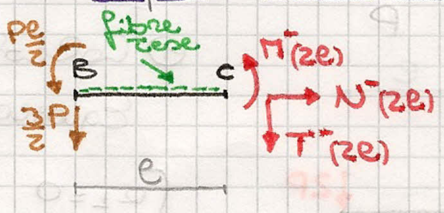
$$\begin{cases} q_3 = 0 \longrightarrow N \text{ costante} \\ \begin{rcases} p_2 = 0 \\ C = 0 \end{rcases} \longrightarrow \begin{cases} T \text{ costante} \\ M \text{ lineare} \end{cases} \end{cases}$$

• Equilibrio puntuale in B^+



$$\begin{cases} N^+(\ell) = 0 \\ T^+(\ell) = -\frac{3}{2}P \\ M^+(\ell) = -\frac{P\ell}{2} \end{cases}$$

• Equilibrio tratto BC

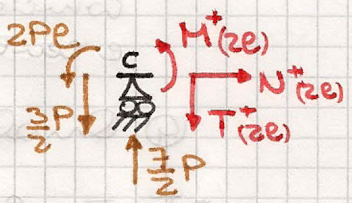


$$\begin{cases} N^-(2\ell) = 0 \\ T^-(2\ell) = -\frac{3}{2}P \\ M^-(2\ell) = -\frac{P\ell}{2} - \frac{3}{2}P\ell = -2P\ell \end{cases}$$

■ **Tratto CD**

$$\begin{cases} q_3 = 0 \longrightarrow N \text{ costante} \\ \begin{rcases} q_2 = 0 \\ C = 0 \end{rcases} \longrightarrow \begin{cases} T \text{ costante} \\ M \text{ lineare} \end{cases} \end{cases}$$

• Equilibrio puntuale in C

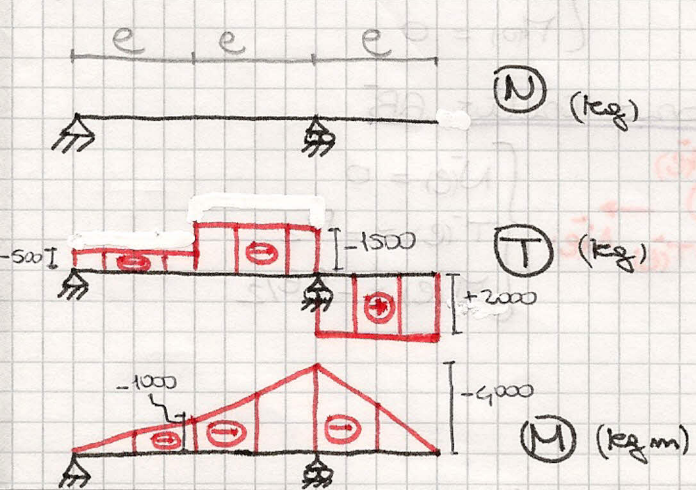


$$\begin{cases} N^+(2\ell) = 0 \\ T^+(2\ell) = \frac{7}{2}P - \frac{3}{2}P = 2P \\ M^+(2\ell) = -2P\ell \end{cases}$$

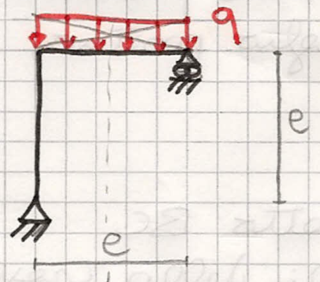
• Equilibrio puntuale in D

$$\begin{cases} N(3\ell) = 0 \\ T(3\ell) = 2P \\ M(3\ell) = 0 \end{cases}$$

⑤ Costruzione dei grafici



Esercizio 2

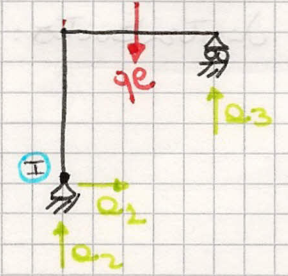


$q = 2000\ kg/m$

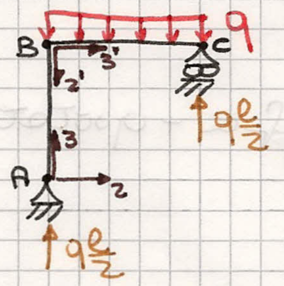
$l = 2m$

Svolgimento

① Calcolo delle reazioni vincolari



$$\begin{cases} R_1 = 0 \\ R_2 + R_3 = ql \\ (I) : R_3 l - ql \cdot \frac{l}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_1 = 0 \\ R_2 = ql - q\frac{l}{2} = q\frac{l}{2} = 2000\ kg \\ R_3 = q\frac{l}{2} = 2000\ kg \end{cases}$$



② Denominazione di tutti i nodi (A, B, ..)

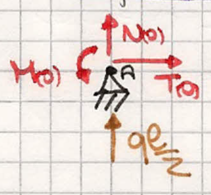
③ Inserimento di un sistema di riferim. (2;3) su ogni tratto, con 3 coincidente con l'asse della trave.

④ Analisi dei tratti

- Tratto AB

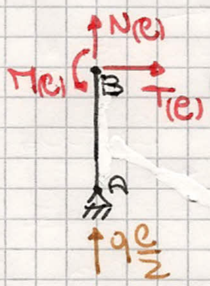
$$\begin{cases} q_3 = 0 \rightarrow [N \text{ costante} \\ q_2 = 0 \\ c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} T \text{ costante} \\ M \text{ lineare} \end{cases}$$

- Equilibrio puntuale in A



$$\begin{cases} N(0) = -ql/2 \\ T(0) = 0 \\ M(0) = 0 \end{cases}$$

- Equilibrio tratto AB



$$\begin{cases} N(l) = -q\frac{l}{2} \\ T(l) = 0 \\ M(l) = 0 \end{cases}$$

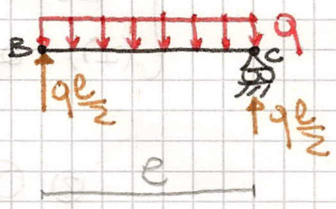
- Tratto BC

$$\begin{cases} q_3 = 0 \rightarrow [N = \text{costante} \\ q_2 = q \\ c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} T \text{ lineare} \\ M \text{ parabolico} \end{cases}$$

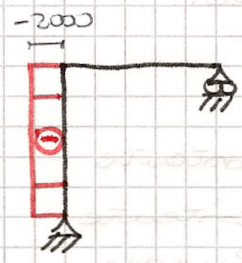
Osservazione:

Nel punto B del tratto BC, l'unica azione interna presente è uno sforzo di taglio positivo, pari a $q\ell/2$

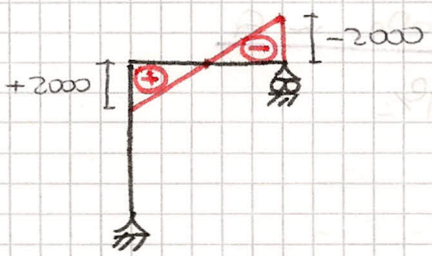
I diagrammi del tratto BC coincidono con quelli della trave appoggiata con carico distribuito:



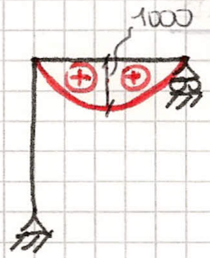
⑤ Costruzione dei grafici + quotature:



(N) (kg)

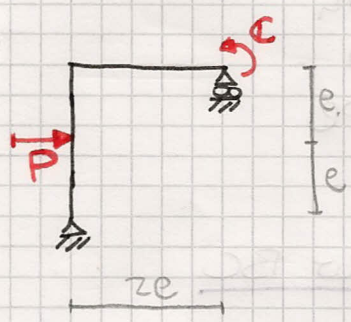


(T) (kg)



(M) (kg·m)

Esercizio 3

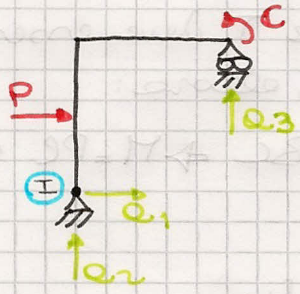


$P = 1000\ kg$

$C = 1\ t\cdot m$

Svolgimento

① Calcolo delle reazioni vincolari:

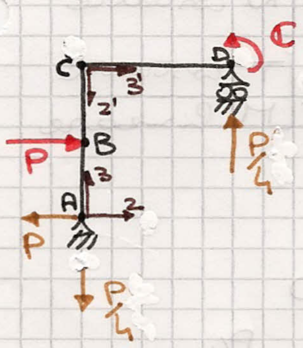


$$\begin{cases} Q_1 = -P \\ Q_2 + Q_3 = 0 \\ (\mathrm{I}) \quad Q_3\, 2e = Pe - C = Pe - \frac{Pe}{2} = \frac{Pe}{2} \end{cases} \qquad C = \frac{Pe}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Q_1 = -P = -1000\ kg \\ Q_2 = -\frac{P}{4} = -250\ kg \\ Q_3 = \frac{P}{4} = 250\ kg \end{cases}$$

② Denominazione di tutti i nodi (A, B, ...)

③ Inserimento di un sistema di riferimento (2;3) su ogni tratto

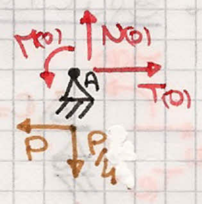


④ Analisi dei tratti

■ Tratto AB

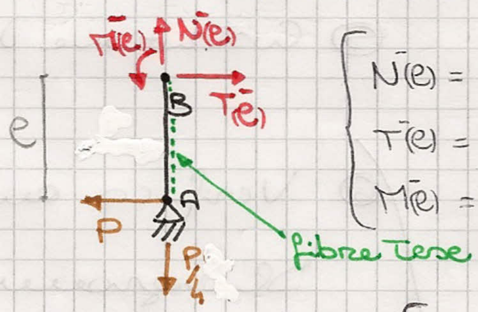
$$\begin{cases} q_3 = 0 \longrightarrow [N \text{ costante} \\ \begin{bmatrix} q_2 = 0 \\ C = 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} T \text{ costante} \\ M \text{ lineare} \end{bmatrix} \end{cases}$$

• Equilibrio puntuale in A



$$\begin{cases} N(0) = P/4 \\ T(0) = P \\ M(0) = 0 \end{cases}$$

• Equilibrio tratto AB

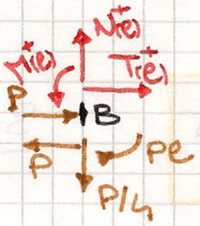


$$\begin{cases} \bar N(e) = P/4 \\ \bar T(e) = P \\ \bar M(e) = Pe \end{cases}$$

■ Tratto BC

$$\begin{cases} q_3 = 0 \longrightarrow [N \text{ costante} \\ \begin{bmatrix} q_2 = 0 \\ C = 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} T \text{ costante} \\ M \text{ lineare} \end{bmatrix} \end{cases}$$

• Equilibrio puntuale in B



$$\begin{cases} N^+(e) = P/4 \\ T^+(e) = 0 \\ M^+(e) = Pe \end{cases}$$

• Equilibrio tratto BC

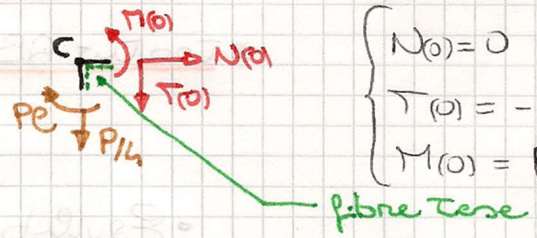
Poiché $T^+(e) = 0$ e T deve essere costante su BC, allora:

$T' = 0$ su tutto BC $\Rightarrow M = Pe$ su tutto BC

▪ Tratto CD

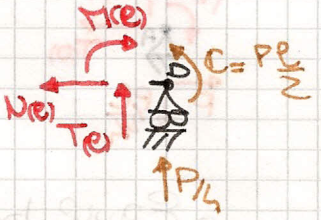
$$\begin{cases} q_3 = 0 \rightarrow & N \text{ costante} \\ q_2 = 0 \rightarrow & T \text{ costante} \\ c = 0 \rightarrow & M \text{ lineare} \end{cases}$$

• Equilibrio in C

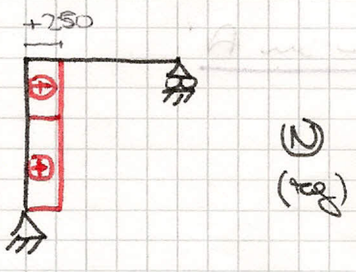


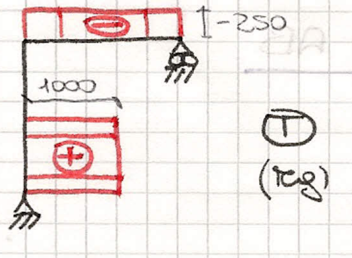
$$\begin{cases} N(0) = 0 \\ T(0) = -P/4 \\ M(0) = Pe \end{cases}$$

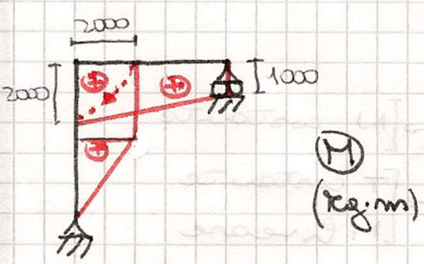
• Equilibrio in D

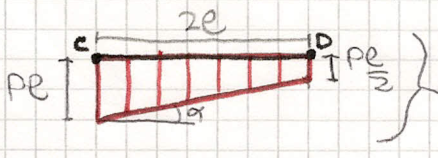


$$\begin{cases} N(e) = 0 \\ T(e) = -P/4 \\ M(e) = \frac{Pe}{2} \end{cases}$$









⑤ Costruzione dei grafici + quotature

⑥ Verifica andamento di M:

Il diagramma lineare di M in CD ha pendenza pari a:

$$tg\,\alpha = \frac{-Pe + \frac{Pe}{2}}{2e} = \frac{-Pe/2}{2e} = -\frac{P}{4}$$

che è esattamente il valore di T in CD