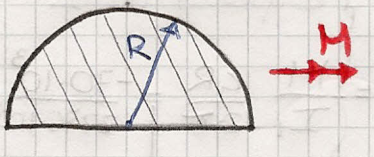
VERIFICHE RESISTENZIALI

Eseguire le verifiche resistenziali delle sezioni indicate.

Esercizio 1



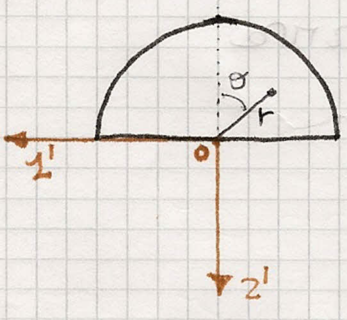
$M = 70\ kN \cdot m$

$R = 12\ cm$

Svolgimento

Essendo, l'asse vettore della coppia M, parallelo ad uno degli assi principali di inerzia, allora la sezione in questione è soggetta ad una flessione retta.

① Determinazione del baricentro



a) si inserisce un sistema di riferimento ausiliario $(0; 1'; 2')$

b) calcolo del baricentro:

$x_2^G = 0$ per simmetria

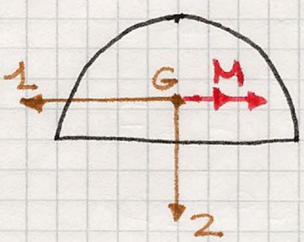
$$x_2^G = \frac{S_{1'}}{A} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}R^2} \cdot 2\int_0^R \int_0^{\pi/2} (-r\cos\theta)\, d\theta\, r\, dr$$

$$= -\frac{4}{\pi R^2}\int_0^R r^2 dr \int_0^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta =$$

$$= -\frac{4}{\pi R^2}\frac{R^3}{3}[\sin\theta]_0^{\pi/2} = -\frac{4}{3\pi}R = -5{,}09\ cm$$

② Calcolo dei momenti principali d'inerzia

Considerando il sistema ~~ba~~ di riferimento baricentrico e principale di inerzia $(G; 1; 2)$; per esso si ha:



$$I_1 = I_{1'} - A d^2 = I_{1'} - \frac{\pi}{2}R^2\left(\frac{4}{3\pi}R\right)^2$$

$$I_{1'} = 2\int_0^R \int_0^{\pi/2} (r\cos\theta)^2\, d\theta\, r\, dr = 2\int_0^R r^3 dr \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta =$$

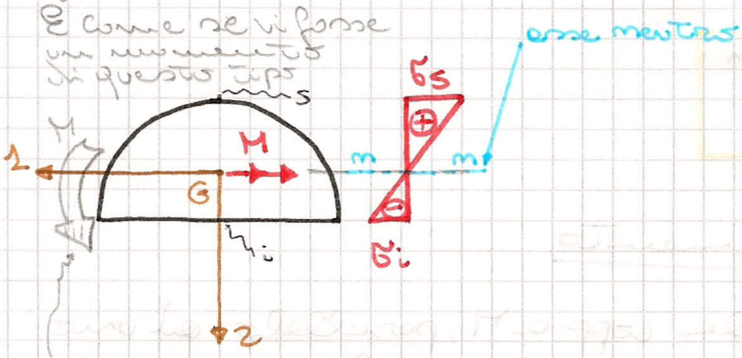
$$= 2\frac{R^4}{4}\left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin\theta\cos\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} = 2\frac{R^4}{4}\frac{\pi}{4} = \frac{\pi R^4}{8}$$

Per cui $I_1 = I_1' - Ad^2 = \frac{\pi R^4}{8} - \frac{\pi}{2}R^2\frac{16R^2}{9\pi^2} = 2276\ cm^4$

③ Calcolo delle sollecitazioni

Attraverso la formula di Navier è possibile calcolare le tensioni normali all'intradosso e all'estradosso della sezione:

È come se vi fosse un momento di questo tipo



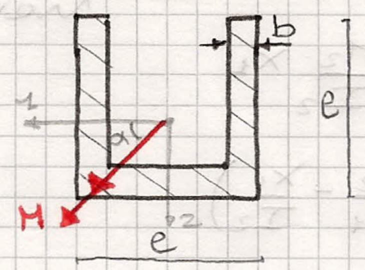
la cui direzione (lungo asse 1) si determina attraverso la regola della mano destra

negativo perché ha verso opposto rispetto a quello di 1

$$\sigma_i = \frac{M}{I_1} x_2^i = -\frac{M}{I_1} \frac{4R}{3\pi} = \frac{-70 \cdot 10^3}{2276 \cdot 10^{-8}} \cdot \frac{4 \cdot 0{,}12}{3\pi} = -156\ MPa$$

$$\sigma_s = \frac{M}{I_1} x_2^s = \frac{M}{I_1}\left(-R + \frac{4R}{3\pi}\right) = \frac{-70 \cdot 10^3}{2276 \cdot 10^{-8}} \left(-0{,}12 + \frac{4 \cdot 0{,}12}{3\pi}\right) = 212\ MPa$$

Esercizio 2



$M = 50\ kN$

$\alpha = 45°$

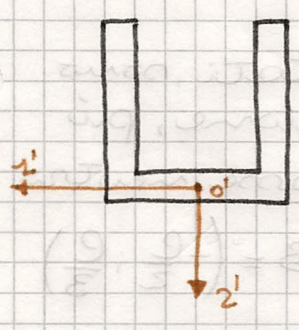
$e = 20\ cm$

$b = 1\ cm$

Svolgimento

Essendo l'asse vettore della coppia M non parallelo ad uno degli assi principali d'inerzia della sezione siamo nel caso di flessione deviata.

① Determinazione del baricentro



a) Si inserisce un s. di riferimento ausiliario (1', 2', O)

b) calcolo del baricentro:

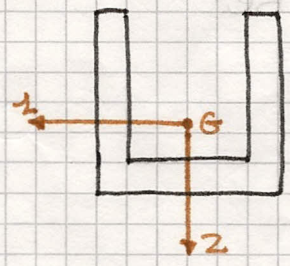
$x_{1'}^G = 0$ per simmetria

TRASCURABILE

$$x_{2'}^G = \frac{S_{1'}}{A} = \frac{1}{3eb}\left[-2be\left(\frac{e}{2}+\cancel{\frac{b}{2}}\right)\right] = -\frac{e}{3}$$

② Calcolo dei momenti principali d'inerzia

Considerando il sistema di riferimento baricentrico e principale d'inerzia (G, 1, 2), per esso si ha:
(i momenti d'inerzia I_1 e I_2 sono minimi)



trascurabile

$$I_1 = 2\left[\frac{1}{12}be^3 + be\left(\frac{e}{6}\right)^2\right] + \cancel{\frac{1}{12}b^3e} + be\left(\frac{e}{3}\right)^2$$

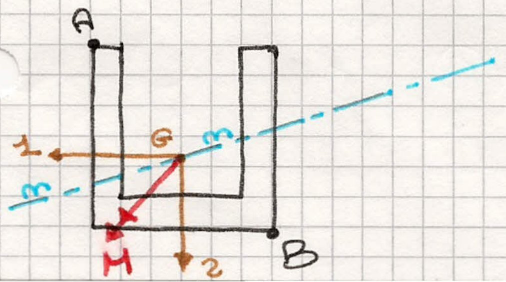
$$= be^3\left[\frac{1}{6}+\frac{1}{18}+\frac{1}{27}\right] = \frac{7}{27}be^3$$

trascurabile

$$I_2 = 2\left[\cancel{\frac{1}{12}eb^3} + be\left(\frac{e}{2}\right)^2\right] + \frac{1}{12}be^3 = be^3\left[\frac{2}{4}+\frac{1}{12}\right]$$

$$= 7/12\ be^3$$

③ Calcolo delle sollecitazioni



a) Componenti di M nel sistema di riferimento principale.

$$M_1 = M\cos 45° = M\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$M_2 = M\,\mathrm{sen}\,45° = M\frac{\sqrt{2}}{2}$$

b) Tensione normale (formula di Navier)

$$\sigma = \frac{M_1}{I_1}x_2 - \frac{M_2}{I_2}x_1 = M\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{x_2}{I_1}-\frac{x_1}{I_2}\right)$$

c) Equazione dell'asse neutro:

$$\sigma = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{I_1}{I_2}x_1 = \frac{4}{9}x_1$$

Disegno l'asse neutro sulla figura.

d) I punti + sollecitati, sono quelli, della sezione, più distanti dell'asse neutro

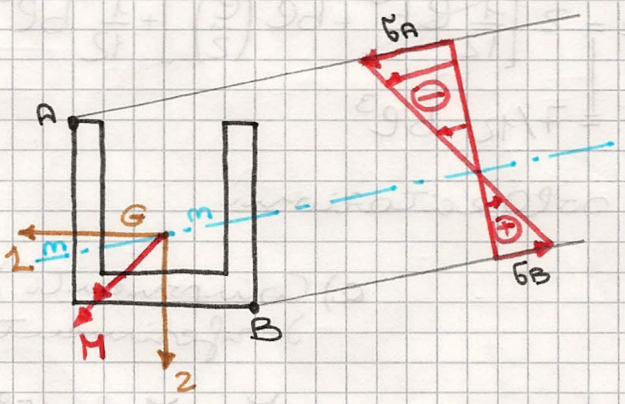
$$A = \left(\frac{e}{2} ; -\frac{2}{3}e\right) \quad ; B = \left(-\frac{e}{2} ; \frac{e}{3}\right)$$

Le sollecitazioni su tali punti sono le seguenti:

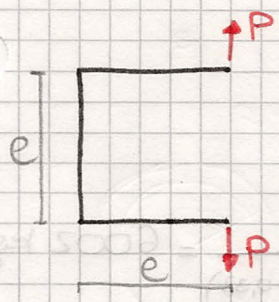
$$\sigma_A = M\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{2}{3}\,\frac{e\,27}{7be^3} - \frac{e\cdot 12}{2\cdot 7\cdot be^3}\right) = -M\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{24}{7be^2} = -214\ MPa$$

$$\sigma_B = M\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{e}{3}\,\frac{27}{7be^3} + \frac{e\cdot 12}{2\cdot 7\,be^3}\right) = +M\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{15}{7be^2} = 134\ MPa$$

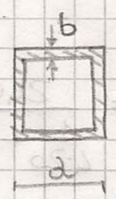
Disegnare le sollecitazioni



Esercizio 3



struttura realizzata con tubolare a sezione quadrata:



$d = 20$ cm

$b = 1$ cm

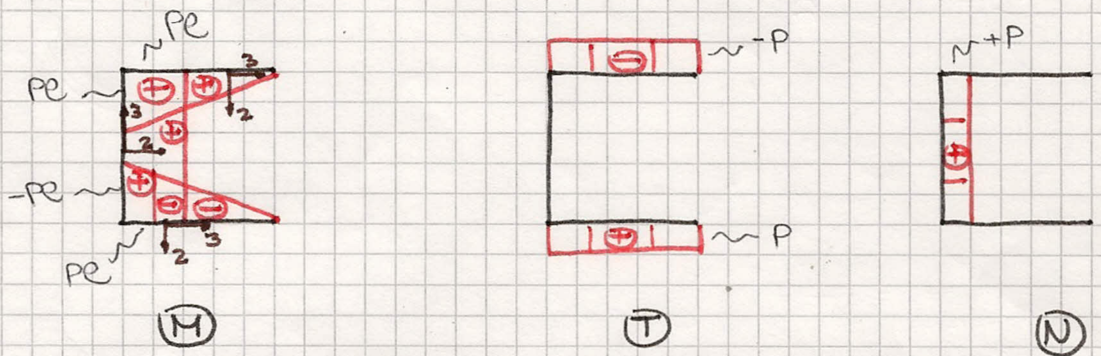
$l = 2$ m

$\sigma_{amm} = 2400$ kg/cm^2

$P_{max} = ?$

Svolgimento

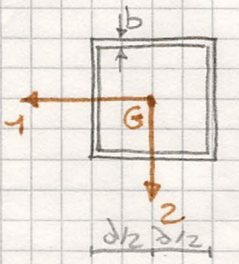
Diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione:



Le sezioni + sollecitate a flessione sono quelle del tratto verticale, con: $N = +P$

$M = +Pl$

Proprietà d'inerzia della sezione:



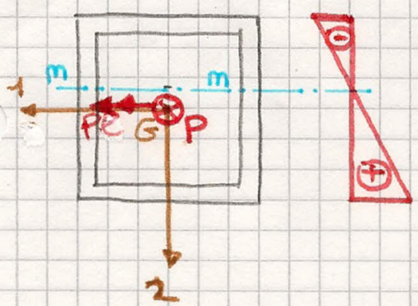
$A = 4bd$

$I_1 = 2 \cdot \frac{1}{12} b d^3 + 2 b d \frac{d^2}{4} = \frac{4}{6} b d^3 = \frac{2}{3} b d^3 = I_2$

Analisi delle tensioni:

- Formula di Navier

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_1}{I_1} x_2 = \frac{P}{4bd} + \frac{3Pl}{2bd^3} x_2$$



- Equazione dell'asse neutro:

$$\frac{P}{4bd} + \frac{3Pl}{2bd^3} \cdot x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{6}\frac{d^2}{l} = -0{,}33 \text{ cm}$$

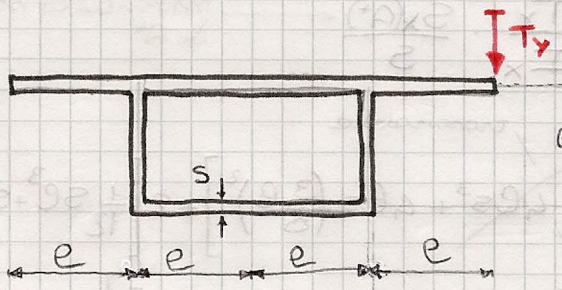
• Le fibre + sollecitate sono quelle inferiori, in quanto sono le più distanti dall'asse neutro:

$$\sigma_i = \frac{P}{4bd} + \frac{3Pe}{2bd^3}\left(\frac{d}{2} + |x_{21}^{AN}|\right) \leq \sigma_{amm}$$

$$P \leq \frac{\sigma_{amm}}{\frac{1}{4bd} + \frac{3}{2}\frac{e}{bd^3}\left(\frac{d}{2} + |x_{21}^{AN}|\right)} = \frac{2400}{\frac{1}{4 \cdot 20} + \frac{3}{2}\frac{200}{20^3}(10+0,33)} = 6002\ kg$$

Per cui la P_{max} sopportabile per la struttura é pari a 6002 kg

Esercizio 4



$T_Y = 1500$ kg

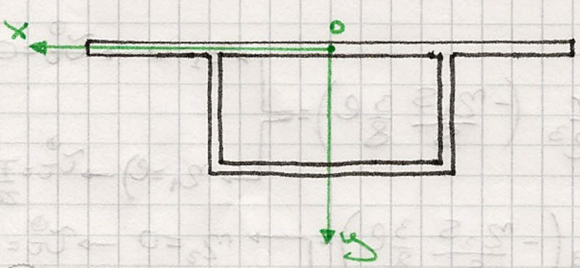
$e = 10$ cm

$s = 1$ cm

$\sigma_{amm} = 2400$ kg/cm^2

Svolgimento

① Determinazione del baricentro.



a) Inserisco un s. di riferimento $x;y$ centrato in O

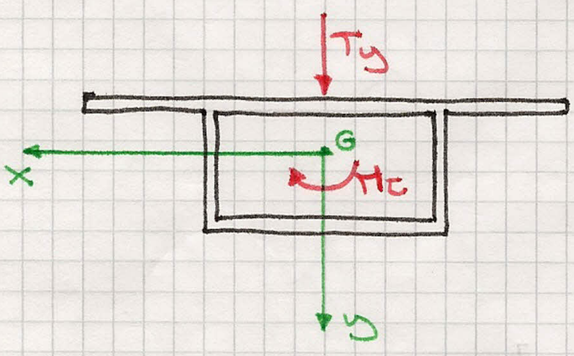
b) Individuazione del baricentro

$x_G = 0$ per simmetria

$$y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{2es\,e/2 + 2ese}{8se} = \frac{3}{8}e$$

② Analisi delle sollecitazioni

Sulla sezione agiscono solo tensioni tangenziali, perché $N = 0$, $M_x = 0$, $M_y = 0$.



Per calcolare le τ si procede nel modo seguente:

a) si applica T_y al centro di taglio (che, data la simmetria della sezione, cade sull'asse y)

b) si aggiunge il momento torcente

$M_t = T_y \cdot 2e$

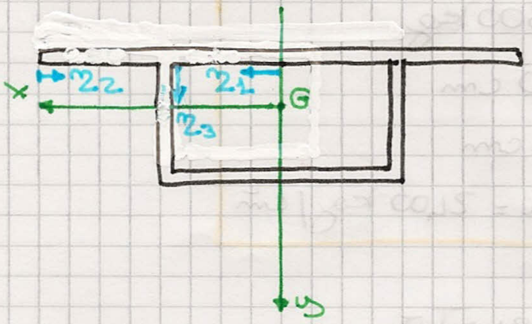
Dal principio di sovrapposizione degli effetti si ha che:

$$\tau = \tau_{TAGLIO} + \tau_{M.TORCENTE}$$

calcolate con la formula di Jourawsky

calcolate con le formule relative alla torsione di sezioni miste.

4 Calcolo delle τ_T



FORMULA DI JOURAWSKY

$$\tau_T = -\frac{T_y}{I_x} \cdot \frac{S_x(A^*)}{s}$$ ← momento statico di A^*

trascurabile

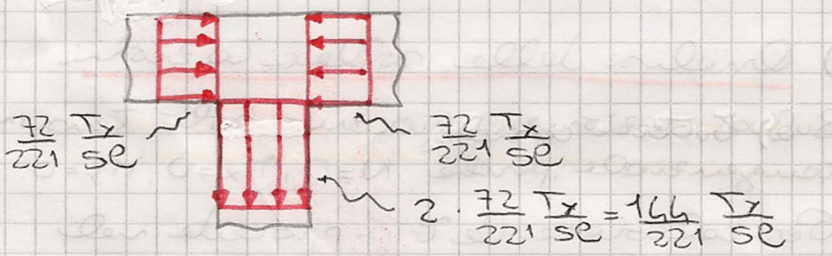
$$I_x = \left[\cancel{\frac{1}{12} 4 e s^3} + 4 e s \left(\frac{3}{8} e\right)^2\right] + 2\left[\frac{1}{12} s e^3 + s e\left(\frac{e}{2} - \frac{3}{8} e\right)^2\right]$$

$$+ \left[\cancel{\frac{1}{12} e s^3} + 2 e s \left(e - \frac{3}{8} e\right)^2\right] \simeq \frac{221}{192} s e^3$$

$$S_x(z_1) = -z_1 s \left(\frac{3}{8} e\right) \Rightarrow \tau_\tau^{(1)} = -\frac{192 T_y}{221 s e^3}\left(-\frac{z_1 s}{s} \frac{3}{8} e\right) = \begin{cases} z_1 = 0 \to \tau_\tau^{(1)} = 0 \\ z_1 = e \to \tau_\tau^{(1)} = \frac{72}{221}\frac{T_y}{se} \end{cases}$$

$$S_x(z_2) = -z_2 s \left(\frac{3}{8} e\right) \Rightarrow \tau_\tau^{(2)} = -\frac{192 T_y}{221 s e^3}\left(-\frac{z_2 s}{s} \frac{3}{8} e\right) = \begin{cases} z_2 = 0 \to \tau_\tau^{(2)} = 0 \\ z_2 = e \to \tau_\tau^{(2)} = \frac{72}{221}\frac{T_y}{se} \end{cases}$$

Analisi del nodo (con l'analogia idrodinamica)

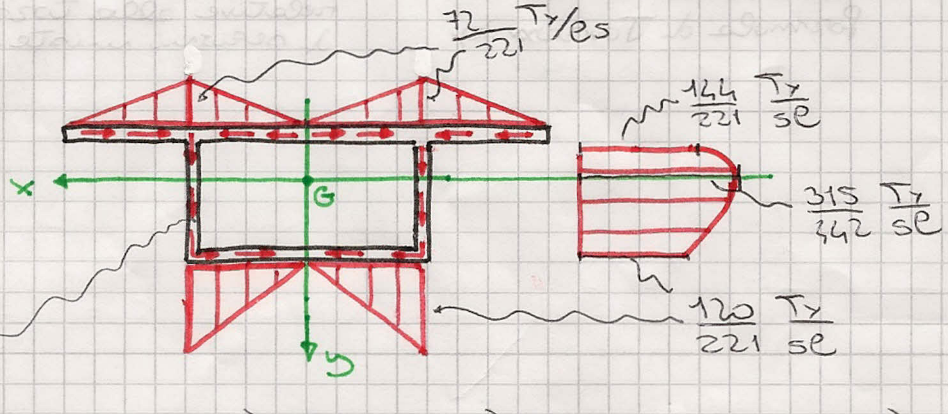


$$S_x(z_3) = -z_3 s \left(+\frac{3}{8} e - \frac{z_3}{2}\right)$$

$$\tau_\tau^{(3)} = \left(\tau_\tau^{(1)} + \tau_\tau^{(2)}\right) + \left[-\frac{192 T_y}{221 s e^3} \frac{z_3 s}{s}\left(-\frac{3}{8} e + \frac{z_3}{2}\right)\right]$$

$$\frac{144}{221}\frac{T_y}{se} - \frac{192 T_y}{221 s e^3} z_3 \left(-\frac{3}{8} e + \frac{z_3}{2}\right) = \begin{cases} z = \frac{3}{8} e \to \tau_\tau^{(3)} = \frac{315}{442}\frac{T_y}{se} \\ z = e \to \tau_\tau^{(3)} = \frac{120}{221}\frac{T_y}{se} \end{cases}$$

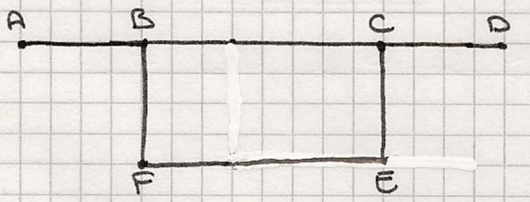
Schematizzazione delle tensioni:



Andamenti dettati dall'analogia idrodinamica

[2] Calcolo delle τ_{Mt}

Considero la sezione idealmente suddivisa in due parti

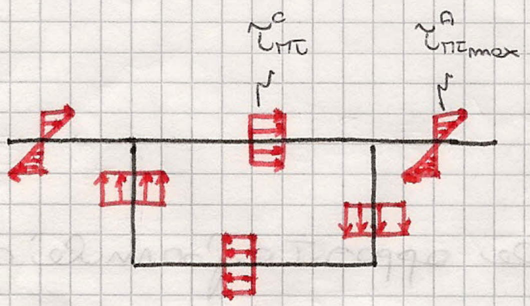


- Una parte chiusa: la sezione rettangolare BCEF, su cui agisce una tensione tangenziale τ^C_{Mt} che lungo lo spessore è data dalla formula di Bredt:

$$\tau^C_{Mt} = \frac{M^C_t}{2A_0 s}$$

con $A_0 = 2\ell^2$ → area racchiusa dalla linea media

M^C_t → quota di Mt assorbita dalla sezione chiusa



- Una parte aperta: le alette AB e CD. Su di esse agiscono delle tensioni tangenziali τ^A_T variabili linearmente lungo lo spessore e con valore massimo pari a:

$$\tau^A_{Mt_{max}} = \frac{M^A_t\, s}{I^A_0}$$

con $I^A_0 = \sum \frac{1}{3} \ell_i b_i^3 = \frac{1}{3} 2\ell s^3$

× sezioni aperte in parete sottile, rettangolari

M^A_t → quota di Mt assorbita dalla parte aperta

I momenti torcenti M^C_t e M^A_t si calcolano con il seguente sistema:

$$\begin{cases} Mt = M^A_t + M^C_t \\ \theta'_C = \theta'_A \end{cases}$$

→ La somma delle singole quote assorbite è pari al momento torcente applicato.

→ Equazione di congruenza: gli angoli unitari di torsione di cui ruotano nel piano Oxy le due parti aperta e chiusa devono essere uguali.

Per legare θ'_C e θ'_A a M_t^C e M_t^A, rispettivamente, usiamo le eq. costitutive della torsione per le sezioni sottili chiuse e aperte.

$$\theta'_C = \frac{M_t^C}{4GA_0^2}\oint_{BCEF}\frac{dl}{s} = \frac{M_t^C}{4G(2l^2)^2}\,\frac{1}{s}\,6l$$

$$\theta'_A = \frac{3M_t^A}{G\,\Sigma\, l_i s_i^3} = \frac{3M_t^A}{G\,2l s^3}$$

x cui, il sistema diviene:

$$\begin{cases} M_t = M_t^A + M_t^C \\ \dfrac{3M_t^A}{2Gls^3} = \dfrac{3M_t^C\, l}{8G\,l^2 s\, l^2} \longrightarrow M_t^A = \dfrac{s^2}{4l^2}M_t^C \end{cases} \qquad (\text{N.B. } M_t^A \ll M_t^C)$$

Risolvendo il sistema si ottiene:

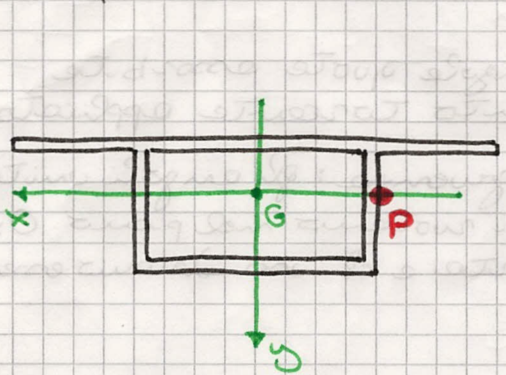
$$\begin{cases} M_t^C = \dfrac{4l^2 M_t}{4l^2+s^2} \\ M_t^A = \dfrac{s^2 M_t}{4l^2+s^2} \end{cases}$$

Sostituendo i valori ottenuti nelle apposite formule si ricava:

$$\tau^C_{Mt} = \frac{4l^2 M_t}{4l^2+s^2}\cdot\frac{1}{2s\,2l^2} = \frac{T_y\,2l}{s(4l^2+s^2)} = 75\ kg/cm^2$$

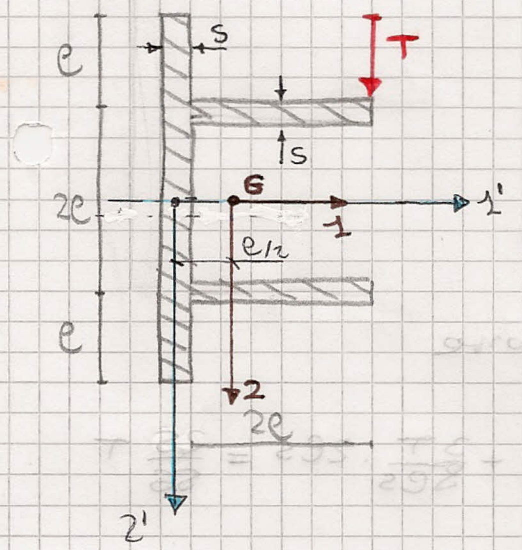
$$\tau^A_{Mt}\Big|_{max} = \frac{s^2\,2l\,T_y}{4l^2+s^2}\cdot\frac{3s}{2ls^3} = \frac{3T_y}{(4l^2+s^2)} = 11\ kg/cm^2$$

Verifica nel punto + sollecitato:



P) $\sigma_I = \sqrt{3}\,\tau = \sqrt{3}\left(\frac{315}{442}\frac{T_y}{sl} + \frac{T_y\, l\, 2}{s(4l^2+s)}\right) = 315\ \frac{kg}{cm^2} < 2400\ \frac{kg}{cm^2} = \sigma_{amm}$

① DETERMINAZIONE BARICENTRO (1',2')



$$\begin{cases} X_{2'}^G = 0 \\ X_{1'}^G = \dfrac{S_2}{A} = \dfrac{+4e^2 s}{8es} = +\dfrac{e}{2} \end{cases}$$

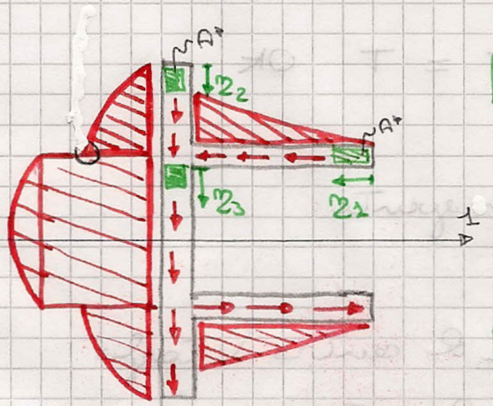
con $A = 4es + 2 \cdot 2es = 8es$

$S_2 = +(2 \cdot 2es \cdot e) = +4e^2 s$

② Applico Jourawsky

$$\tau_2 = -\frac{T}{I_1} \cdot \frac{S_1(A^*)}{s}$$

$$I_1 = \frac{1}{12} s (4e)^3 + \Big(\underbrace{\cancel{\tfrac{1}{12} 2e s^3}}_{\text{trascurabile}} + 2es \cdot e^2\Big) \cdot 2 = \frac{28}{3} e^3 s$$



$\boxed{z_1}$ $$\tau_2 = -\frac{T}{I_1} \frac{S_1(A^*)}{s} = -\frac{T}{I_1} \frac{(-\overbrace{z_1 s}^{A^*} \overbrace{e}^{\text{distanza del baricentro dell'area dall'asse 1}})}{s} = \frac{3T}{28e^3 s} \cdot z_1 e$$

con andamento lineare

se
$$\begin{cases} z_1 = 0 \Rightarrow \tau_2 = 0 \\ z_1 = 2e \Rightarrow \tau_2 = \dfrac{3T}{14es} \end{cases}$$

$\boxed{z_2}$ $$\tau_2 = -\frac{T}{I_1} \frac{S_1(A^*)}{s} = -\frac{3T}{28e^3 s} \left(-\frac{\overbrace{z_2 s}^{A^*} \overbrace{\left(2e - \frac{z_2}{2}\right)}^{\text{distanza del baricentro dell'area dall'asse 1}}}{s} \right)$$

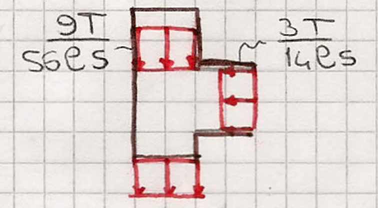
con andamento parabolico

se
$$\begin{cases} z_2 = 0 \Rightarrow \tau_2 = 0 \\ z_2 = e \Rightarrow \tau_2 = \dfrac{9T}{56es} \end{cases}$$

• asse parabola: $\tau_2' = 0$

$$\frac{d\tau_2}{dz} = \frac{3T}{28e^3 s} \cdot 2e - \frac{3T}{28e^3 s} \cdot z_2 = 0 \Rightarrow z_2 = 2e$$

ANALISI DEL NODO:



dall'analogia idrodinamica:

$$\frac{9T}{56es} + \frac{3T}{14es} = \frac{3T}{8es}$$

$\boxed{z_3}$ $$\tau_2 = -\frac{T}{I_1} \cdot \frac{S_1(A^*)}{s} = -\frac{3T}{28e^3 s} \left(-\frac{\overbrace{z_3 s \left(e - \frac{z_3}{2}\right)}^{A^*}}{s} \right)$$

con andamento parabolico

se
$$\begin{cases} z_3 = 0 \Rightarrow \tau_2 = 0 \\ z_3 = 2e \Rightarrow \tau_2 = 0 \end{cases}$$

• asse parabola

$$\frac{d\tau_2}{dz_3} = 0 \Rightarrow z_3 = e$$

$\Downarrow$

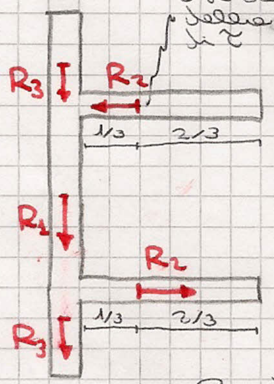
se $z_3 = e \Rightarrow \tau_2 = \dfrac{3T}{56es}$

$$\tau^{J}_{MAX} = \frac{3}{8}\frac{T}{es} + \frac{3}{56}\frac{T}{es} = \frac{24}{56}\frac{T}{es}$$

ANALISI DEL CENTRO DI TAGLIO

1) Individuazione delle risultanti delle forze

il punto di applicazione è il baricentro della distrib. di τ



$$R_1 = \int_0^{2e} \frac{3T}{28e^3 s} z_3\left(e - \frac{z_3}{2}\right) \overbrace{s\,dz}^{dA} + \frac{3T}{8es}\cdot 2es = \frac{46}{56}T$$

$$R_2 = \int_0^{2e} \frac{3T}{28e^3 s} z_1 \overbrace{es\,dz}^{dA} = \frac{3}{14}T$$

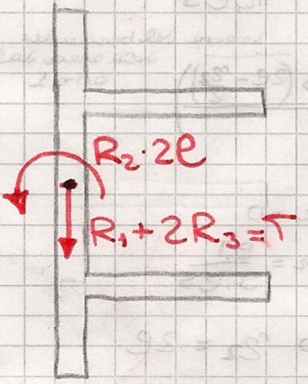
$$R_3 = \int_0^{e} \frac{3T}{28e^3 s} z_2\left(2e - \frac{z_1}{2}\right) s\,dz = \frac{5}{56}T$$

x verifica:

Eq. di bilancio delle forze

$$T = R_1 + 2R_3 = \frac{46}{56}T + 2\cdot\frac{5}{56}T = T \quad \text{OK}$$

Il sistema in esame è equivalente al seguente:



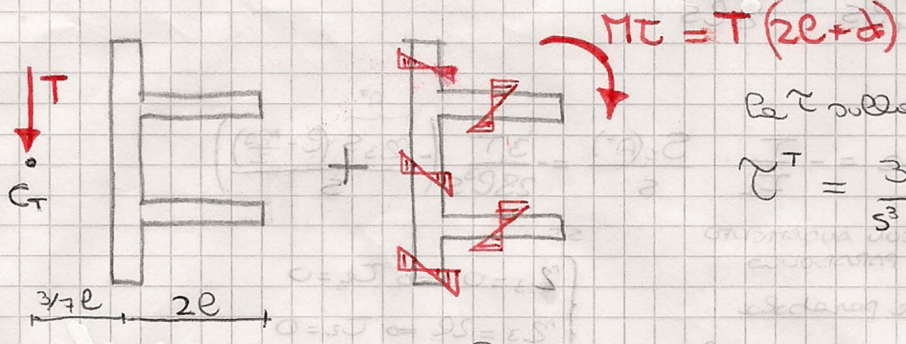
Occorre ora individuare il centro di taglio

il centro di taglio è quel punto in corrispondenza del quale la sommatoria dei momenti generati dalle risultanti delle τ si annulla.

x cui:

$$(R_1 + 2R_3)\cdot \overset{\text{distanza del centro di taglio}}{d} = R_2\, 2e \Rightarrow d = \frac{R_2\, 2e}{R_1 + 2R_3} = \frac{3}{7}e$$

Il sistema in esame quindi si riconduce



La τ sulla sezione derivante da M_t è:

$$\tau^{T} = \frac{3\,M_t \cdot s}{s^3\,4e + 2\,s^3\,2e}$$

La tensione totale è definibile come:

$$\tau_{TOT} = \tau^{J} + \tau^{T} \leq \tau_{AMM}$$