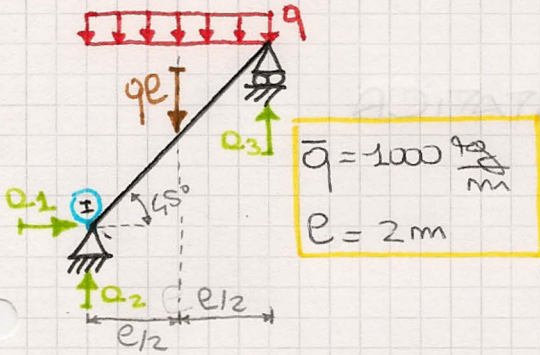


1° ESERCITAZIONE

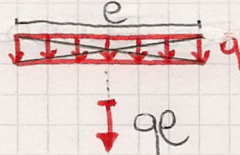
Determinare, quando è possibile, le reazioni vincolari e discutere successivamente il problema statico.

Esercizio 1



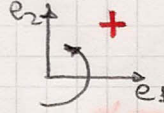
Sviluppiamento:

① Trasformazione di tutti i carichi distribuiti in carichi concentrati:



Operazione valida solo per la determinazione delle reazioni vincolari.

② Impostazione di un sistema di riferimento per i versi positivi delle forze e dei momenti



③ Esplicitazione dei vincoli nello schema

④ Applicazione delle equazioni cardinali della statica:

- $T_1 = 0$ equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale (con $T_2 =$ risultante di tutte le forze orizzontali)
- $T_2 = 0$ equazione di equilibrio alla traslazione verticale (con $T_2 =$ risultante di tutte le forze verticali)
- $M_{(I)} = 0$ equazione di equilibrio alla rotazione rispetto al polo arbitrario (I)

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 + a_3 - \bar{q}l = 0 \\ (I^*) \quad a_3 l - \bar{q}l \cdot \frac{l}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 + a_3 = \bar{q}l \\ a_3 = \bar{q} \frac{l}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = \bar{q} \frac{l}{2} = 1000 \text{ kg} \\ a_3 = \bar{q} \frac{l}{2} = 1000 \text{ kg} \end{cases}$$

Quando 3 equazioni in 3 incognite, vi è una soluzione univoca per il sistema.

Il sistema in questione è ISOSTATICO

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{q}l \\ \bar{q}l \frac{l}{2} \end{pmatrix}$$

1° ESERCIZIO

Calcolare la reazione di vincolo in un sistema di travi.

Il sistema è costituito da una trave AB di lunghezza 10m e una trave BC di lunghezza 10m.

La trave AB è inclinata di 45° rispetto all'orizzontale. La trave BC è orizzontale.

Una forza di 2000kg è applicata alla trave AB a 2m dalla A. Una forza di 1000kg è applicata alla trave BC a 5m dalla B.

La trave AB è vincolata ad A e la trave BC è vincolata ad C.

Calcolare le reazioni di vincolo in A e C.

Il sistema è in equilibrio statico.

Le reazioni di vincolo sono:

Reazione di vincolo in A: $R_A = 1000kg$

Reazione di vincolo in C: $R_C = 1000kg$

Le reazioni di vincolo sono:

Reazione di vincolo in A: $R_A = 1000kg$

Reazione di vincolo in C: $R_C = 1000kg$

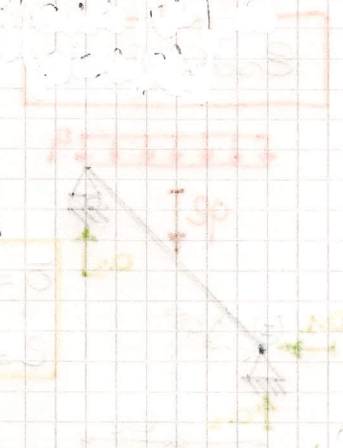
Le reazioni di vincolo sono:

Reazione di vincolo in A: $R_A = 1000kg$

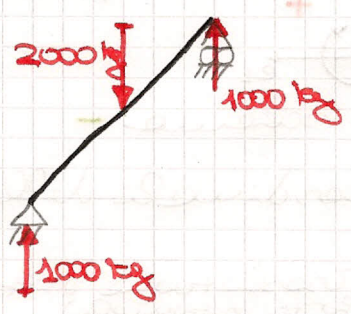
Reazione di vincolo in C: $R_C = 1000kg$

Le reazioni di vincolo sono:

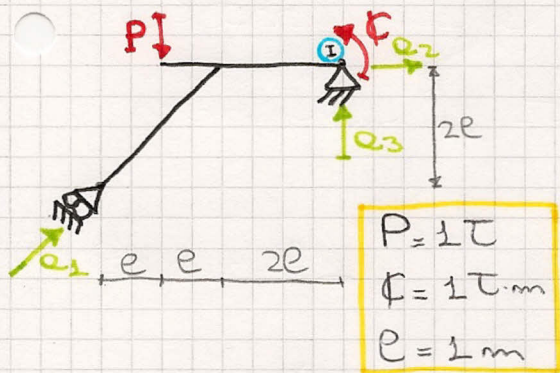
Reazione di vincolo in A: $R_A = 1000kg$



7) Momento della Trave:



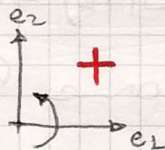
Esercizio 2



Svolgimento:

① Trasformazione di tutti i carichi distribuiti in carichi concentrati

② Impostazione di un sistema di riferimento per i versi positivi delle forze e dei momenti:

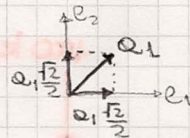


③ Esplicitazione dei vincoli nello schema

decomposizione di Q_1 nel sistema di riferimento (e_1, e_2)

come $Q_1 \cos 45^\circ = Q_1 \frac{\sqrt{2}}{2}$ lungo e_1

$Q_1 \sin 45^\circ = Q_1 \frac{\sqrt{2}}{2}$ lungo e_2



④ Applicazione delle equazioni cardinali della statica:

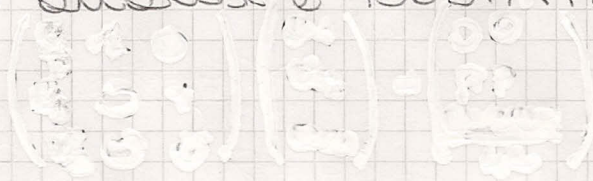
$$\begin{cases} Q_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + Q_2 = 0 \\ Q_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + Q_3 - P = 0 \\ (\Sigma) C + P \cdot 3e - Q_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 4e + Q_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2e = 0 \end{cases}$$

risolvendo il sistema ottengo:

$$\begin{cases} Q_1 = \frac{C + 3Pe}{\sqrt{2} \cdot e} = 2828 \text{ kg} \\ Q_2 = -Q_1 \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{C + 3Pe}{2e} = -2000 \text{ kg} \\ Q_3 = P - Q_1 \frac{\sqrt{2}}{2} = P - \frac{C + 3Pe}{2e} = -1000 \text{ kg} \end{cases}$$

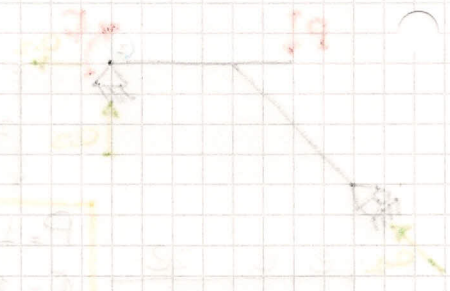
Quando 3 equazioni in 3 incognite vi è una soluzione univoca per il sistema.

La trave in analisi è ISOSTATICA

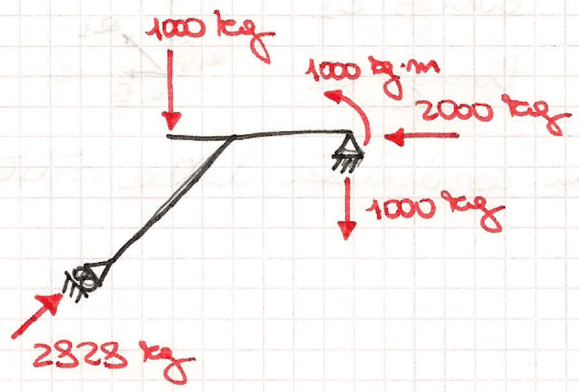


Caricamento

$\sum M = 0$
 $\sum F_x = 0$
 $\sum F_y = 0$



⑦ Riassunto delle traviature:

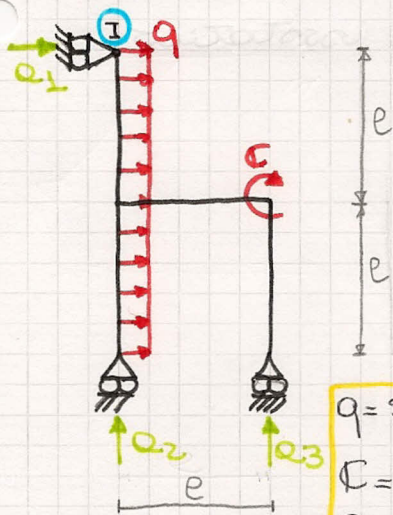


$$\begin{cases} 0 = 10 + \frac{1}{3} \cdot 10 \\ 0 = 9 - 10 + \frac{1}{3} \cdot 10 \\ 0 = 20 - 10 + 9 - \frac{1}{3} \cdot 10 - 9 + 0 \quad (F) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2828 = \frac{9915}{3.57} \quad (F) \\ 2828 = \frac{9915}{3.57} \quad (F) \\ 2828 = \frac{9915}{3.57} \quad (F) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2828 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

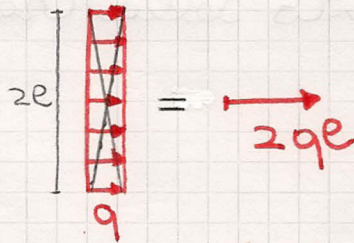
Esercizio 3



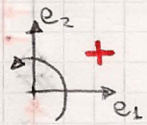
$$\begin{aligned} q &= 500 \text{ kg/m} \\ C &= 2 \text{ T}\cdot\text{m} \\ e &= 3 \text{ m} \end{aligned}$$

Svolgimento

- ① Trasformazione di tutti i carichi distribuiti in carichi concentrati.



- ② Impostazione di un sistema di riferimento per i versi positivi delle forze e dei momenti



- ③ Esplicitazione dei vincoli nello schema

- ④ Applicazione delle equazioni cardinali della statica:

$$\begin{cases} Q_1 + 2qe = 0 \\ Q_2 + Q_3 = 0 \\ \text{(I)} \quad -C + Q_3e + 2qe \cdot e = 0 \end{cases}$$

risolvendo il sistema ottengo:

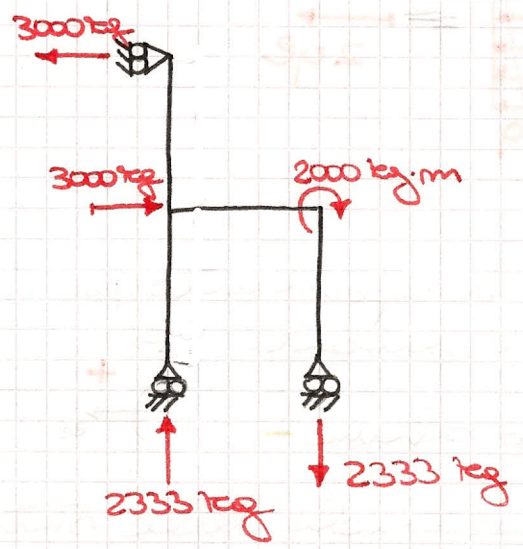
$$\begin{cases} Q_1 = -2qe = -3000 \text{ kg} \\ Q_2 = -\frac{(C - 2qe^2)}{e} = 2333 \text{ kg} \\ Q_3 = \frac{C - 2qe^2}{e} = -2333 \text{ kg} \end{cases}$$

Avendo 3 equazioni in 3 incognite, vi è una soluzione univoca per il sistema.

La trave in questione è ISOSTATICA

Saturno

① Riassunto della Trave:



$$\sum M = 0$$

$$0 = 3005 + 20$$

$$0 = 20 - 30$$

$$0 = 3005 + 3000 - 20 = 0$$

$$3000 - 3000 = 0$$

$$3000 - 3000 = 0$$

$$3000 - 3000 = 0$$

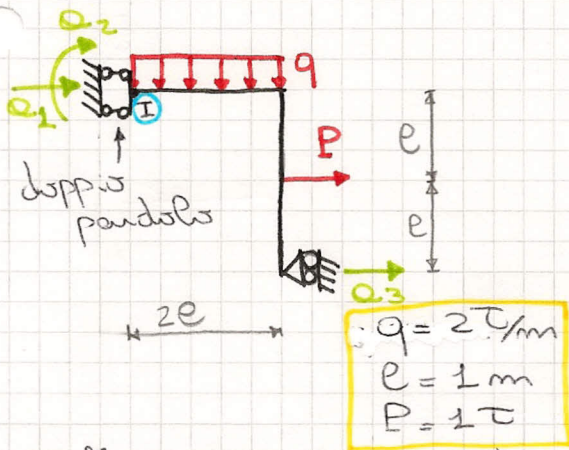
Il sistema è iperstatico perché il numero di reazioni di vincolo è maggiore del numero di equazioni di equilibrio. Per risolvere il problema si applicano le equazioni di equilibrio e si determinano le reazioni di vincolo. In questo caso, le reazioni di vincolo sono: una forza orizzontale e una forza verticale in ogni supporto, e un momento in ogni vincolo di tipo cerniera. Le equazioni di equilibrio sono:

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

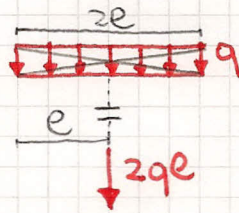
$$\sum M = 0$$

Esercizio 4

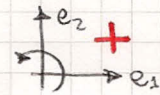


Subordinamento:

① Trasformazione di tutti i carichi distribuiti in carichi concentrati:



② Impostazione di un sistema di riferimento per i versi positivi delle forze e dei momenti:



③ Applicazione dei vincoli nello schema.

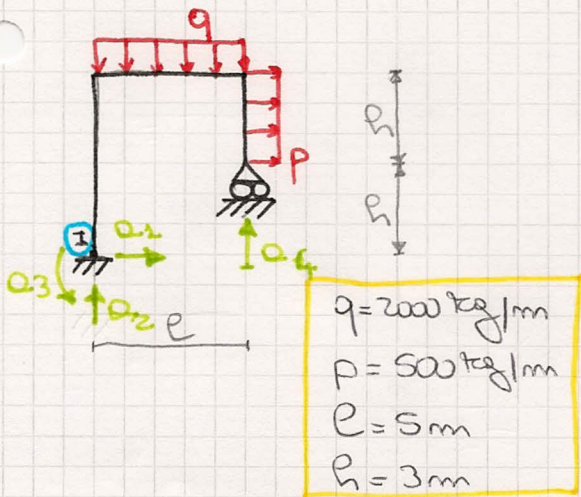
④ Applicazione delle equazioni cardinali della statica:

$$\begin{cases} Q_3 + Q_1 + P = 0 \\ \boxed{2qe = 0} \rightarrow \text{EQUAZIONE IMPOSSIBILE} \\ (I) \quad Q_3 \cdot 2e - Q_2 + P \cdot e - 2qe \cdot e = 0 \end{cases}$$

Il sistema non è verificato, in quanto non è soddisfatta l'equazione di equilibrio alla traslazione verticale ($2qe$ non può essere nullo).

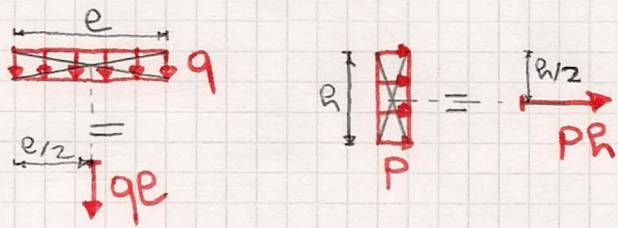
Per questo motivo la trave è LABILE

Esercizio 5

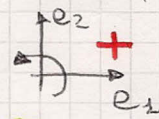


Svilgimento

① Trasformazione di tutti i carichi distribuiti in carichi concentrati:



② Impostazione di un sistema di riferimento per i versi positivi delle forze e dei momenti:



③ Esplicitazione dei vincoli nello schema

④ Applicazione delle equazioni cardinali della statica:

$$\begin{cases}
 q_1 + Ph = 0 \\
 q_2 + q_4 - qe = 0 \\
 (\pm) q_4 e - qe \frac{e}{2} - Ph \cdot \frac{3}{2}h + q_3 = 0
 \end{cases}
 \rightarrow
 \begin{cases}
 q_1 = -Ph = -1500 \text{ kg} \\
 q_2 = qe - q_4 \\
 q_3 = qe \frac{e}{2} + \frac{3}{2}Ph^2 - q_4 e
 \end{cases}$$

Avendo 3 equazioni in 4 incognite, le soluzioni possibili per il sistema sono infinite.

La trave in questione è **IPERSTATICA**.

⑤ Valutazione del grado di iperstaticità (i):

$$i = v - x, \text{ con:}$$

INCASTRO \Downarrow CARRENO SOSPESO
 $i = 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 - 3 = 1$

La trave è 1 volta iperstatica, cioè c'è un vincolo in eccesso.

$v =$ Sommatrice dei vincoli presenti, opportunamente pesati.

Il peso di ogni singolo vincolo è dato dal numero di reazioni vincolari esplicitate.

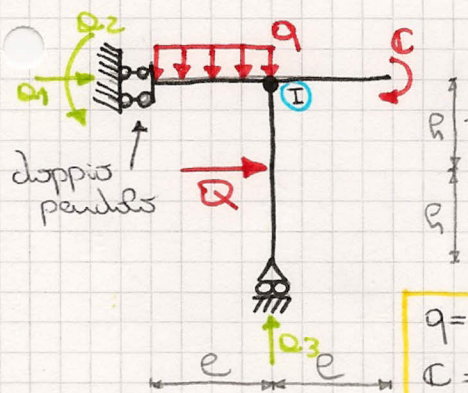
a) vincoli semplici ($v_i = 1$)
CARRENO SOSPESO, APPOGGIO SEMPLICE, ...

b) vincoli doppi ($v_i = 2$)
APPOGGIO FISSO, CERNIERA, ...

c) vincoli tripli ($v_i = 3$)
INCASTRO

$x =$ N° incognite "finali" presenti nel sistema. (q_2, q_3, q_4)

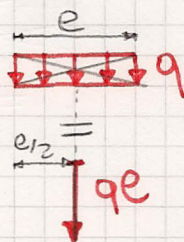
Esercizio 6



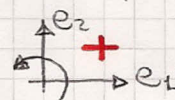
$$\begin{aligned}
 q &= 1,5 \text{ T/m} \\
 C &= 1 \text{ T}\cdot\text{m} \\
 Q &= 1 \text{ T} \\
 e &= 3 \text{ m} \\
 h &= 2 \text{ m}
 \end{aligned}$$

Sviluppiamo

① Trasformazione di tutti i carichi distribuiti in carichi concentrati:



② Impostazione di un sistema di riferimento per i versi positivi delle forze e dei momenti:



③ Esplicitazione dei vincoli nello schema

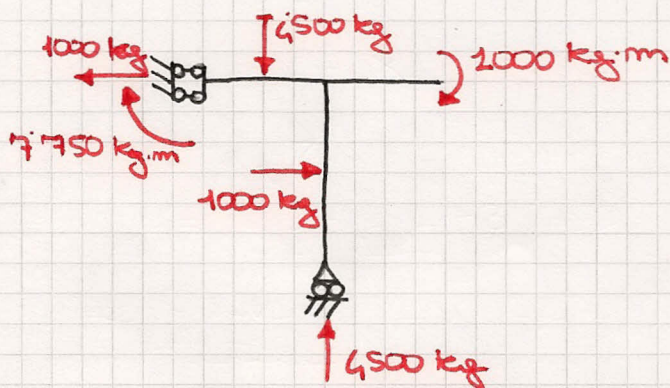
④ Applicazione delle equazioni cardinali della statica:

$$\begin{cases}
 Q_1 + Q = 0 \\
 Q_3 - qe = 0 \\
 (\text{I}) \quad Q_2 + qe \cdot \frac{e}{2} + Q \cdot h - C = 0
 \end{cases}
 \Rightarrow
 \begin{cases}
 Q_1 = -Q = -1000 \text{ kg} \\
 Q_3 = +qe = 4500 \text{ kg} \\
 Q_2 = C - Qh - qe \frac{e}{2} = -7750 \text{ kg}\cdot\text{m}
 \end{cases}$$

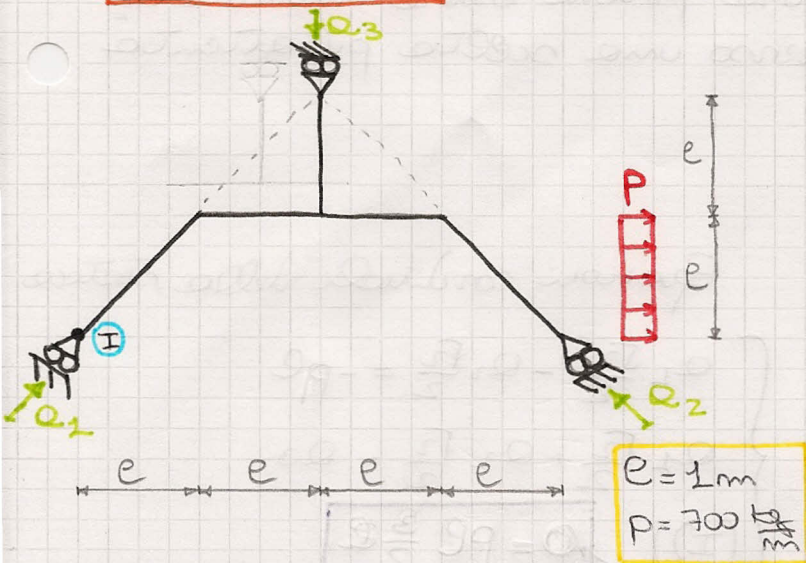
Ovvero 3 equazioni in 3 incognite, vi è una soluzione univoca per il sistema.

La trave in questione è ISOSTATICA

⑤ Riassunto della trave:

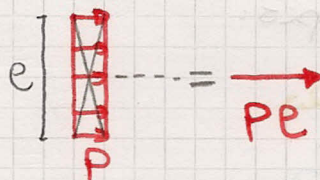


Esercizio 7

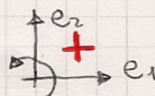


Giudgmento:

① Trasformazione dei carichi distribuiti in concentrati:



② Impostazione di un sistema di riferimento per i versi positivi delle forze e dei momenti:



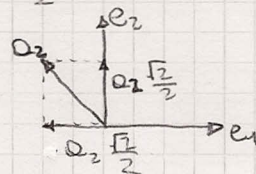
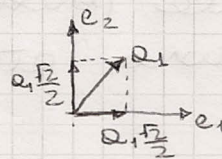
③ Esplicitazione dei vincoli nello schema

decomposizione di Q_1 e Q_2 nel sistema di riferimento (e_1, e_2)

come:

$$\begin{cases} Q_1 \cos 45^\circ = Q_1 \frac{\sqrt{2}}{2} ; \text{lungo } e_1 \\ Q_1 \sin 45^\circ = Q_1 \frac{\sqrt{2}}{2} ; \text{lungo } e_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q_2 \cos 45^\circ = Q_2 \frac{\sqrt{2}}{2} ; \text{lungo } e_1 \\ Q_2 \sin 45^\circ = Q_2 \frac{\sqrt{2}}{2} ; \text{lungo } e_2 \end{cases}$$



④ Applicazione delle equazioni cardinali della statica:

$$\begin{cases} Q_1 \frac{\sqrt{2}}{2} - Q_2 \frac{\sqrt{2}}{2} + Pe = 0 \\ Q_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + Q_2 \frac{\sqrt{2}}{2} - Q_3 = 0 \\ (\pm) Q_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 4e - Q_3 \cdot 2e - Pe \cdot \frac{e}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_1 - Q_2 = -\sqrt{2} pe \\ Q_1 + Q_2 = \sqrt{2} Q_3 \\ Q_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} Q_3 + \frac{\sqrt{2}}{8} pe \end{cases}$$

risultato:

$$\begin{cases} Q_1 = -pe \frac{\sqrt{2}}{2} + Q_3 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ Q_2 = pe \frac{\sqrt{2}}{2} + Q_3 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ pe \frac{\sqrt{2}}{2} + Q_3 \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} Q_3 + pe \frac{\sqrt{2}}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_1 = -pe \frac{\sqrt{2}}{2} + Q_3 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ Q_2 = pe \frac{\sqrt{2}}{2} + Q_3 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \boxed{1 = \frac{1}{4}} \end{cases}$$

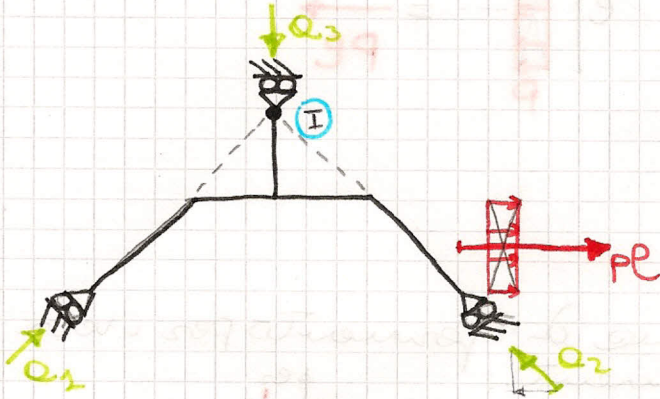
IMPOSSIBILE

Il sistema non è verificato, per questo motivo la trave è LABILE

Osservazione:

La labilità della struttura poteva essere immediatamente individuata attraverso una scelta più attenta del polo I.

per esempio:



Equazioni cardinali della statica:

$$\begin{cases} Q_1 \frac{\sqrt{2}}{2} - Q_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = -PE \\ Q_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + Q_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = Q_3 \\ (I) \quad 0 = PE \frac{3}{2} e \end{cases}$$

IMPOSSIBILE

perché la risultante di Q_1, Q_2, Q_3 passa per I, quindi non genera momento

La traveatura, sotto le assegnate condizioni di carico, è labile perché è impossibile soddisfare l'equilibrio alle rotazioni attorno al punto (I).