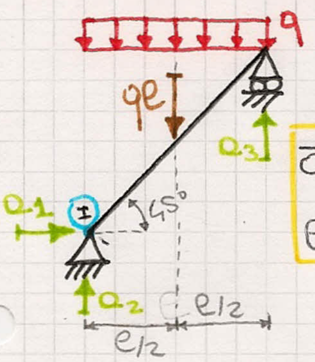
1° ESERCITAZIONE

Determinare, quando è possibile, le reazioni vincolari e discutere successivamente il problema statico.

Esercizio 1

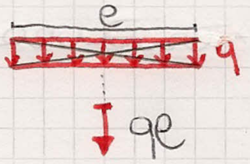


$\bar{q} = 1000 \frac{kg}{m}$

$\ell = 2m$

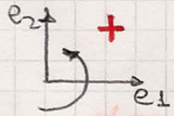
Svolgimento:

① Trasformazione di tutti i carichi distribuiti in carichi concentrati:



Operazione valida solo per la determinazione delle reazioni vincolari.

② Impostazione di un sistema di riferimento per i versi positivi delle forze e dei momenti



③ Esplicitazione dei vincoli nello schema

④ Applicazione delle equazioni cardinali della statica:

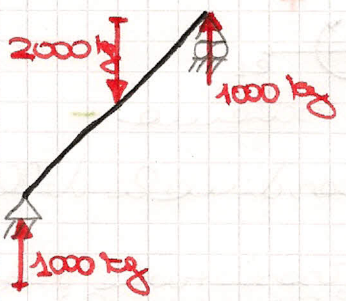
$$\begin{cases} F_1 = 0 & \text{equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale (con } F_1 = \text{sommatoria di tutte le forze orizzontali)} \\ F_2 = 0 & \text{equazione di equilibrio alla traslazione verticale (con } F_2 = \text{sommatoria di tutte le forze verticali)} \\ M_{r}(\mathrm{I}) = 0 & \text{equazione di equilibrio alla rotazione rispetto al polo arbitrario } \mathrm{I} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q_1 = 0 \\ Q_2 + Q_3 - \bar{q}\ell = 0 \\ (\mathrm{I}^{+}) \quad Q_3\ell - \bar{q}\ell \cdot \frac{\ell}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_1 = 0 \\ Q_2 + Q_3 = \bar{q}\ell \\ Q_3 = \bar{q}\frac{\ell}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_1 = 0 \\ Q_2 = \bar{q}\frac{\ell}{2} = 1000\, kg \\ Q_3 = \bar{q}\frac{\ell}{2} = 1000\, kg \end{cases}$$

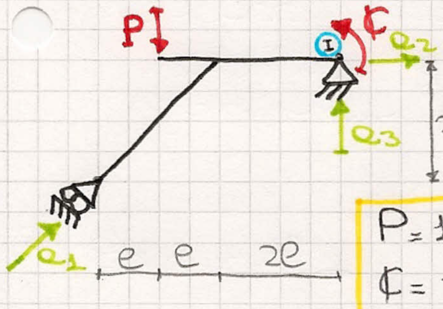
Avendo 3 equazioni in 3 incognite, vi è una soluzione univoca per il sistema.

Il sistema in questione è ISOSTATICO

7 Riassunto della Travatura:



Esercizio 2

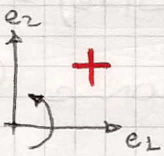


P = 1T
C = 1T·m
e = 1 m

Svolgimento:

① Trasformazione di tutti i carichi distribuiti in carichi concentrati

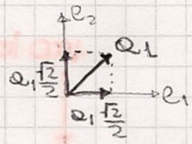
② Impostazione di un sistema di riferimento per i versi positivi delle forze e dei momenti:



③ Esplicitazione dei vincoli nello schema – decomposizione di Q_1 nel sistema di riferimento $(e_1; e_2)$ come

$Q_1 \cos 45° = Q_1 \frac{\sqrt{2}}{2}$ lungo e_1

$Q_1 \operatorname{sen} 45° = Q_1 \frac{\sqrt{2}}{2}$ lungo e_2



④ Applicazione delle equazioni cardinali della statica:

$$\begin{cases} Q_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + Q_2 = 0 \\ Q_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + Q_3 - P = 0 \\ (\mathrm{I}) \quad C + P \cdot 3e - Q_1 \frac{\sqrt{2}}{2} 4e + Q_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2e = 0 \end{cases}$$

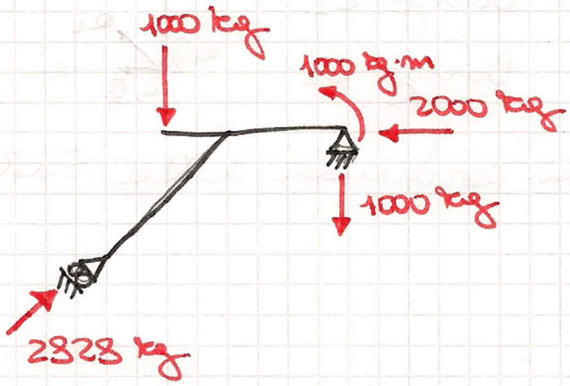
risolvendo il sistema ottengo:

$$\begin{cases} Q_1 = \dfrac{C + 3Pe}{\sqrt{2} \cdot e} = 2828 \text{ kg} \\ Q_2 = -Q_1 \dfrac{\sqrt{2}}{2} = -\dfrac{C + 3Pe}{2e} = -2000 \text{ kg} \\ Q_3 = P - Q_1 \dfrac{\sqrt{2}}{2} = P - \dfrac{C + 3Pe}{2e} = -1000 \text{ kg} \end{cases}$$

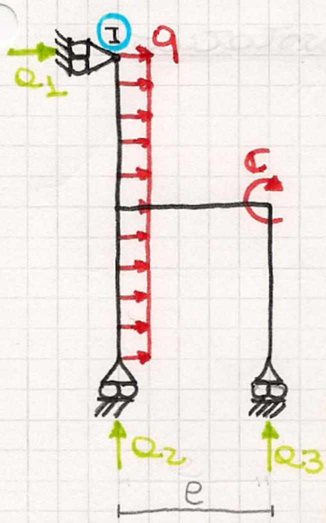
Avendo 3 equazioni in 3 incognite, vi è una soluzione unica per il sistema.

La travatura in analisi è ISOSTATICA

④ Riassunto della travatura:



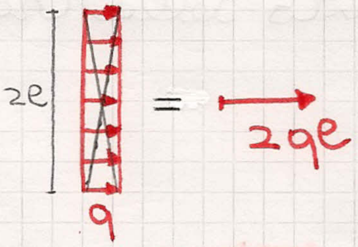
Esercizio 3



$q = 500$ kg/m
$\mathfrak{C} = 2$ t·m
$\ell = 3$ m

Svolgimento

① Trasformazione di tutti i carichi distribuiti in carichi concentrati.



② Impostazione di un sistema di riferimento per i versi positivi delle forze e dei momenti

③ Esplicazione dei vincoli nello schema

④ Applicazione delle equazioni cardinali della statica:

$$\begin{cases} Q_1 + 2q\ell = 0 \\ Q_2 + Q_3 = 0 \\ (\mathrm{I})\quad -\mathfrak{C} + Q_3\ell + 2q\ell\cdot\ell = 0 \end{cases}$$

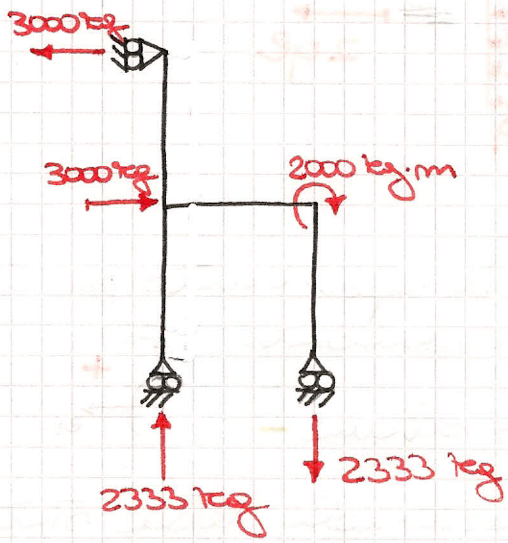
risolvendo il sistema ottengo:

$$\begin{cases} Q_1 = -2q\ell = -3000\,\text{kg} \\ Q_2 = -\left(\dfrac{\mathfrak{C} - 2q\ell^2}{\ell}\right) = 2333\,\text{kg} \\ Q_3 = \dfrac{\mathfrak{C} - 2q\ell^2}{\ell} = -2333\,\text{kg} \end{cases}$$

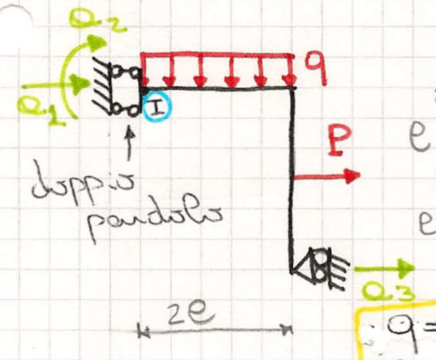
Avendo 3 equazioni in 3 incognite, vi è una soluzione univoca per il sistema.

La travatura in questione è ISOSTATICA

① Riassunto della Travatura:



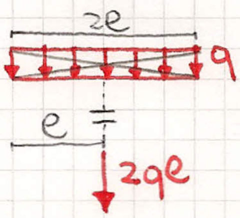
Esercizio 4



$q = 2\,T/m$
$\ell = 1\,m$
$P = 1\,T$

Svolgimento:

① Trasformazione di tutti i carichi distribuiti in carichi concentrati:



② Impostazione di un sistema di riferimento per i versi positivi delle forze e dei momenti: e_2, e_1, +

③ Esplicitazione dei vincoli nello schema

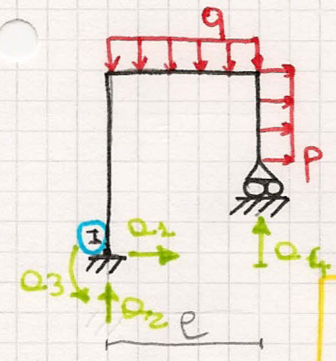
④ Applicazione delle equazioni cardinali della statica:

$$\begin{cases} Q_3 + Q_1 + P = 0 \\ \boxed{2q\ell = 0} \longrightarrow \text{EQUAZIONE IMPOSSIBILE} \\ (I^{)}) \quad Q_3 \cdot 2\ell - Q_2 + P\cdot\ell - 2q\ell\cdot\ell = 0 \end{cases}$$

Il sistema non è verificato, in quanto non è soddisfatta l'equazione di equilibrio alla traslazione verticale ($2q\ell$ non può essere nullo).

Per questo motivo la travatura è LABILE

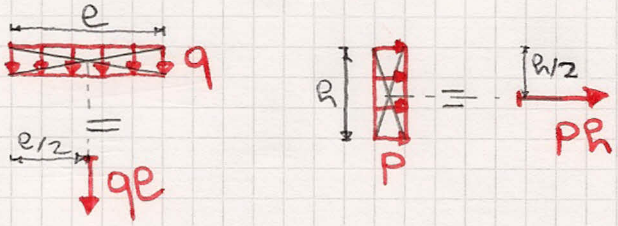
Esercizio 5



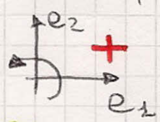
$q = 2000$ kg/m
$p = 500$ kg/m
$\ell = 5$ m
$h = 3$ m

Svolgimento

① Trasformazione di tutti i carichi distribuiti in carichi concentrati:



② Impostazione di un sistema di riferimento per i versi positivi delle forze e dei momenti:



③ Esplicitazione dei vincoli nello schema

④ Applicazione delle equazioni cardinali della statica:

$$\begin{cases} Q_1 + ph = 0 \\ Q_2 + Q_4 - q\ell = 0 \\ (I\circlearrowright) \quad Q_4 \ell - q\ell \frac{\ell}{2} - ph \cdot \frac{3}{2}h + Q_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_1 = -ph = -1500 \text{ kg} \\ Q_2 = q\ell - Q_4 \\ Q_3 = q\frac{\ell^2}{2} + \frac{3}{2}ph^2 - Q_4 \ell \end{cases}$$

Avendo 3 equazioni in 4 incognite, le soluzioni possibili per il sistema sono infinite.
La travatura in questione è IPERSTATICA.

⑤ Valutazione del grado di iperstaticità (i):

$i = s - x$, con:

s = Sommatoria dei vincoli presenti, opportunamente pesati. Il peso di ogni singolo vincolo è dato dal numero di reazioni vincolari esplicate.

a) vincoli semplici ($s_i = 1$)
CARRELLO SCORREVOLE, APPOGGIO SEMPLICE,...

b) vincoli doppi ($s_i = 2$)
APPOGGIO FISSO, CERNIERA,...

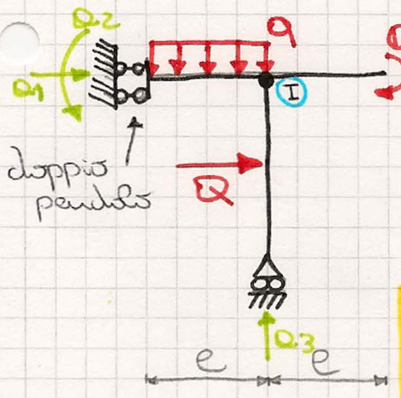
c) vincoli tripli ($s_i = 3$)
INCASTRO

x = N° incognite "finali" presenti nel sistema (Q_2, Q_3, Q_4)

$$i = \underbrace{1 \cdot 3}_{\text{INCASTRO}} + \underbrace{1 \cdot 1}_{\text{CARRELLO SCORREVOLE}} - 3 = 1$$

La trave è 1 volta iperstatica, cioè c'è un vincolo in eccesso.

Esercizio 6



$q = 1{,}5\ T/m$

$C = 1\ T\cdot m$

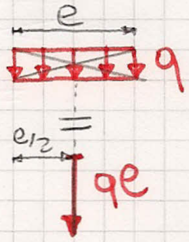
$Q = 1\ T$

$\ell = 3\ m$

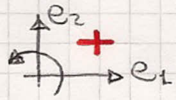
$h = 2\ m$

Svolgimento

① Trasformazione di tutti i carichi distribuiti in carichi concentrati:



② Impostazione di un sistema di riferimento per i versi positivi delle forze e dei momenti:



③ Esplicitazione dei vincoli nello schema —

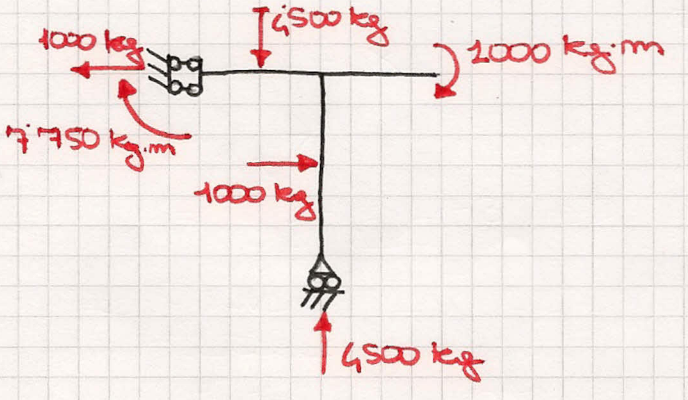
④ Applicazione delle equazioni cardinali della statica:

$$\begin{cases} Q_1 + Q = 0 \\ Q_3 - q\ell = 0 \\ (I^*)\quad Q_2 + q\ell\cdot\frac{\ell}{2} + Q\cdot h - C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_1 = -Q = -1000\ kg \\ Q_3 = +q\ell = 4500\ kg \\ Q_2 = C - Qh - q\frac{\ell^2}{2} = -7750\ kg\cdot m \end{cases}$$

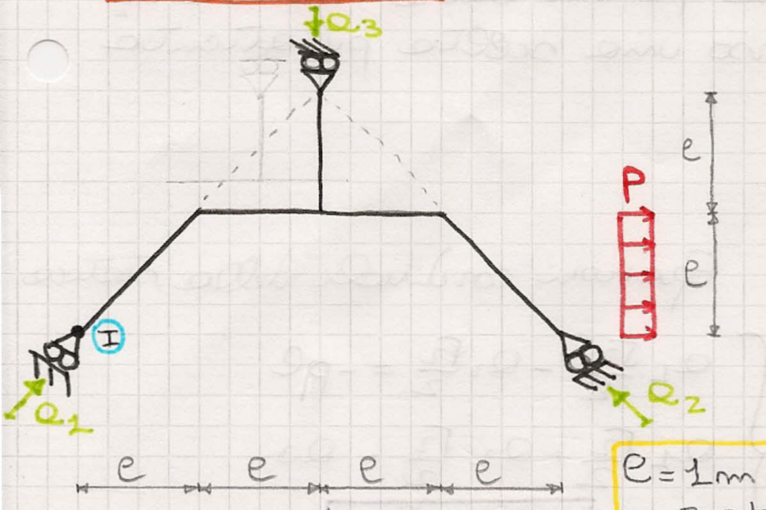
Avendo 3 equazioni in 3 incognite, vi è una soluzione univoca per il sistema.

La travatura in questione è ISOSTATICA

⑤ Riassunto della travatura:



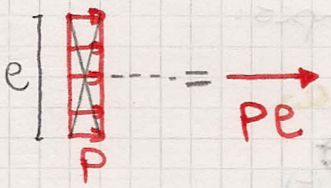
Esercizio 7



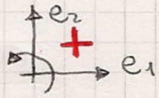
$e = 1\,m$
$p = 700\ \frac{kg}{m}$

Svolgimento:

① Trasformazione dei carichi distribuiti in concentrati:



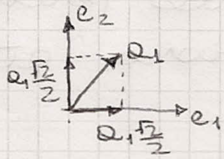
② Impostazione di un sistema di riferimento per i versi positivi delle forze e dei momenti:



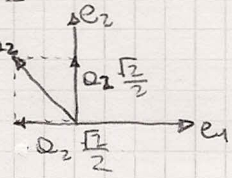
③ Esplicitazione dei vincoli nello schema —

decomposizione di Q_1 e Q_2 nel sistema di riferimento $(e_1; e_2)$ come:

$$\begin{cases} Q_1 \cos 45° = Q_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ; lungo } e_1 \\ Q_1 \operatorname{sen} 45° = Q_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ; lungo } e_2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} Q_2 \cos 45° = Q_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ; lungo } e_1 \\ Q_2 \operatorname{sen} 45° = Q_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ; lungo } e_2 \end{cases}$$



④ Applicazione delle equazioni cardinali della statica:

$$\begin{cases} Q_1 \frac{\sqrt{2}}{2} - Q_2 \frac{\sqrt{2}}{2} + pe = 0 \\ Q_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + Q_2 \frac{\sqrt{2}}{2} - Q_3 = 0 \\ (I↻)\quad Q_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 4e - Q_3 \cdot 2e - pe \cdot \frac{e}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_1 - Q_2 = -\sqrt{2}\, pe \\ Q_1 + Q_2 = \sqrt{2}\, Q_3 \\ Q_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} Q_3 + \frac{\sqrt{2}}{8} pe \end{cases} \Rightarrow$$

risolvendo:

$$\begin{cases} Q_1 = -pe \frac{\sqrt{2}}{2} + Q_3 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ Q_2 = pe \frac{\sqrt{2}}{2} + Q_3 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cancel{pe \frac{\sqrt{2}}{2}} + \cancel{Q_3 \frac{\sqrt{2}}{2}} = \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2} Q_3} + \cancel{pe \frac{\sqrt{2}}{8}}_{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_1 = -pe \frac{\sqrt{2}}{2} + Q_3 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ Q_2 = pe \frac{\sqrt{2}}{2} + Q_3 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \boxed{1 = \frac{1}{4}} \end{cases}$$

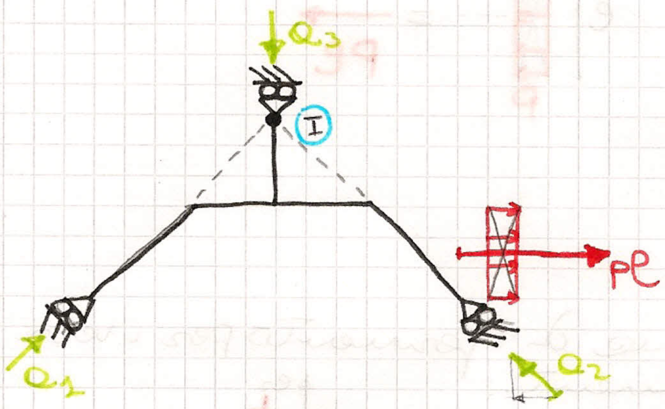
IMPOSSIBILE

Il sistema non è verificato, per questo motivo la trave è LABILE

Osservazione:

La labilità della struttura poteva essere immediatamente individuata attraverso una scelta più attenta del polo I.

per esempio:



Equazioni cardinali della statica:

$$\begin{cases} Q_1 \frac{\sqrt{2}}{2} - Q_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = -pl \\ Q_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + Q_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = Q_3 \\ (\overset{\curvearrowright}{I}) \quad \boxed{0 = pl \frac{3}{2} l} \end{cases}$$

IMPOSSIBILE

perché la risultante di Q_1, Q_2, Q_3 passa per I, quindi non genera momento

La travatura, sotto le assegnate condizioni di carico, è labile perché è impossibile soddisfare l'equilibrio alla rotazione attorno al punto (I).