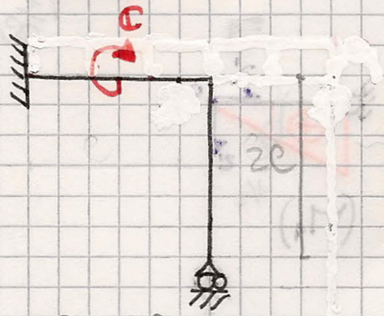
6ª ESERCITAZIONE

Con il metodo delle forze, risolvere le seguenti travature iperstatiche e disegnare i diagrammi quotati di (M, T, N)

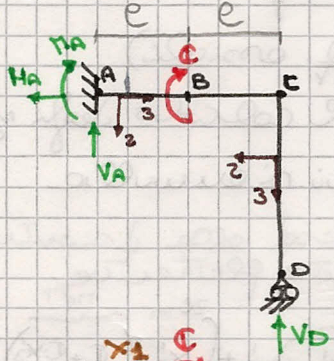
Esercizio 1



$C = 2\,T\cdot m$
$e = 3\,m$
si trascurino le deformazioni assiali

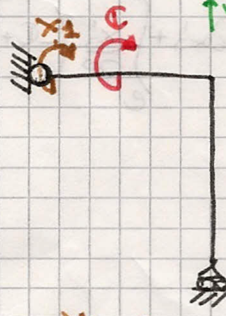
Svolgimento

① Equazioni cardinali della statica

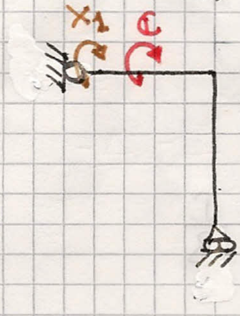


$$\begin{cases} H_A = 0 \\ V_A + V_D = 0 \\ (A\circlearrowright)\quad -C + V_D \cdot 2e - M_A = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Travatura 1 volta iperstatica}$$

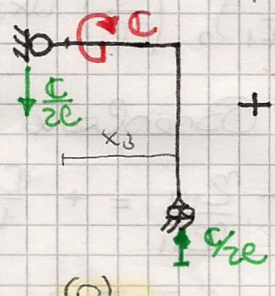
Occorre quindi eliminare 1 reazione vincolare per rendere isostatica la travatura.



② Arbitrariamente scegliamo di eliminare M_A attraverso l'inserimento di una cerniera in A.
In tal modo si fissa come incognita iperstatica $X_1 = M_A$ e si ottiene la travatura a lato, la quale è scomponibile come segue:

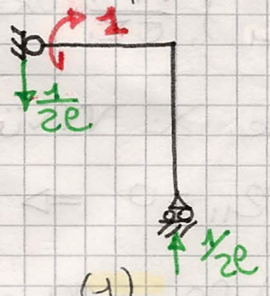


=



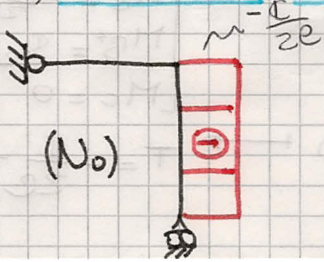
(0)
SISTEMA ISOSTATICO
(mancante dell'incognita iperstatica)

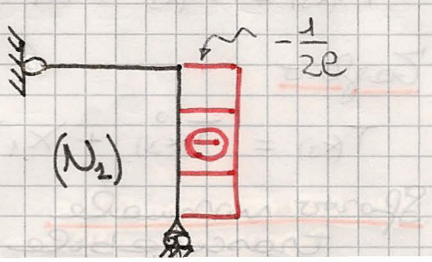
+ X_1



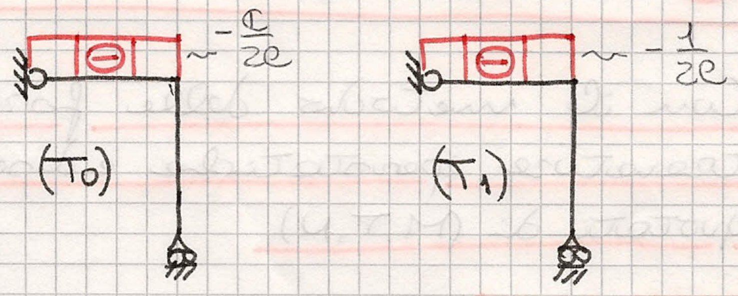
(1)
SISTEMA AUSILIARIO
(l'unica forza agente è l'incognita iperstatica)

③ Sviluppo dei diagrammi di sollecitazione:
a) SFORZO NORMALE

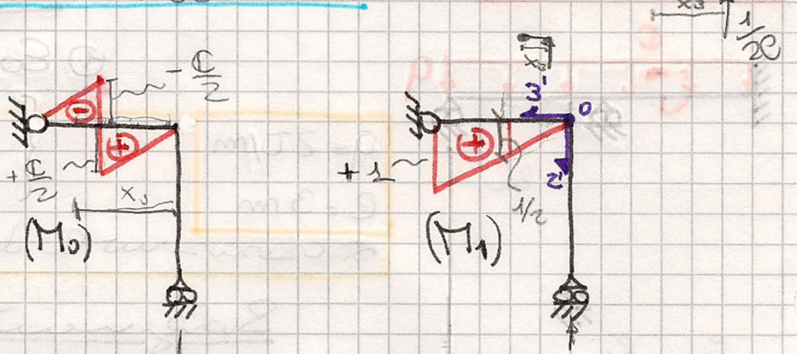




b) TAGLIO



c) MOMENTO FLETTENTE



④ Calcolo dei coefficienti η (trascurando le def. assiali)

a) Si fissa un sistema di riferimento $(2',3')$ per il calcolo degli η, il cui centro coincide con il punto in cui si annulla il momento ($3'$, $2'$).

b) Calcolo degli η

integrale spezzato in base alle discontinuità del grafico del momento flettente

$$\eta_{10} = \int_0^{2\ell} \frac{M_1 M_0}{EI_1}\,dx_3' = \frac{1}{EI_1}\int_0^{2\ell} M_1 M_0\,dx_3' = \frac{1}{EI_1}\left[\int_0^{\ell} \overbrace{\frac{x_3'}{2\ell}}^{M_1}\,\overbrace{\frac{\mathcal{C}}{2\ell}x_3'}^{M_0^{1°p}}\,dx_3' + \int_{\ell}^{2\ell} \overbrace{\frac{x_3'}{2\ell}}^{M_1}\overbrace{\left(-\mathcal{C}+\frac{\mathcal{C}x_3'}{2\ell}\right)}^{M_0^{2°p}}dx_3'\right]$$

$$= \frac{1}{EI_1}\left[\frac{\mathcal{C}}{4\ell^2}\cdot\frac{\ell^3}{3} + \frac{\mathcal{C}}{2\ell}\left[\frac{x_3'^3}{6\ell} - \frac{x_3'^2}{2}\right]_{\ell}^{2\ell}\right] = -\frac{1}{12}\frac{\mathcal{C}\ell}{EI_1}$$

$$\eta_{11} = \int_0^{2\ell} \frac{M_1 M_1}{EI_1}\,dx_3' = \frac{1}{EI_1}\int_0^{2\ell}\left(\frac{x_3'}{2\ell}\right)^2 dx_3' = \frac{2\ell}{3EI_1}$$

⑤ Equazione di Müller Breslau

$$\eta_{10} + X_1\,\eta_{11} = 0 \Rightarrow X_1 = -\frac{\eta_{10}}{\eta_{11}} = +\frac{\mathcal{C}\ell}{12}\,\frac{3}{2\ell} = +\frac{\mathcal{C}}{8}$$

⑥ Calcolo delle sollecitazioni totali (sfruttando il principio di sovrapposizione degli effetti)

- Momento flettente:

M_1 in $x_3 = \ell$

$$M_{(x_3)} = M^0_{(x_3)} + X_1 M^1_{(x_3)} \longrightarrow \begin{cases} M_A = +\mathcal{C}/8 \\ M_{B^-} = -\frac{\mathcal{C}}{2} + \frac{X_1}{2} = -7/16\cdot\mathcal{C} \\ M_{B^+} = \mathcal{C}/2 + X_1/2 = +9/16\cdot\mathcal{C} \\ M_C = 0 \end{cases}$$

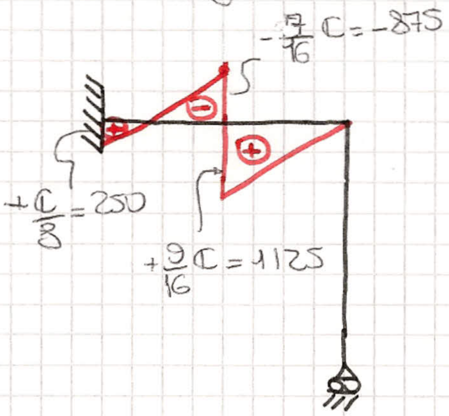
- Taglio

$$T_{(x_3)} = T^0_{(x_3)} + X_1 T^1_{(x_3)} \longrightarrow T = -\frac{\mathcal{C}}{2\ell} - \frac{X_1}{2\ell} = -\frac{9}{16}\frac{\mathcal{C}}{\ell}$$

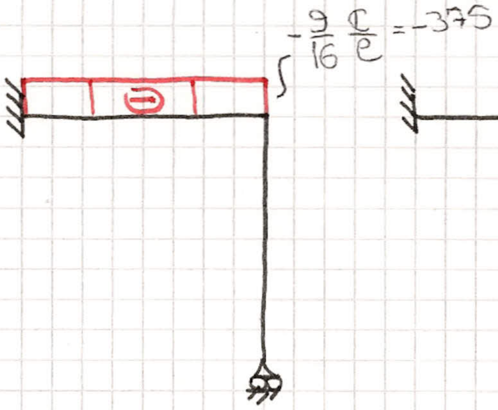
Sforzo normale

$$N_{(x_3)} = N^0_{(x_3)} + X_1 \, N^1_{(x_3)} \longrightarrow N = -\frac{C}{2\ell} - \frac{X_1}{2\ell} = -\frac{9}{16}\frac{C}{\ell}$$

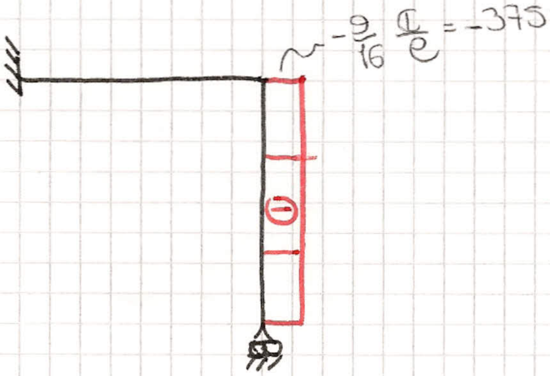
⑦ Grafici totali + quotature



M (kg·m)

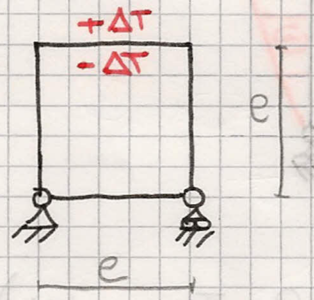


T (kg)

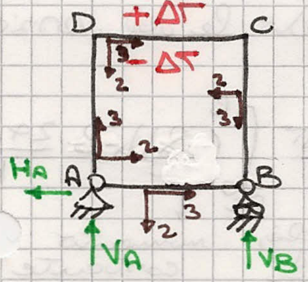


N (kg)

Esercizio 2



$\Delta T = 20°C$ → carico termico
$l = 3\,m$
$\alpha = 10^{-5}\,°C^{-1}$ → coeff. di dilatazione termica
$E = 210000\,N/mm^2$ → modulo elastico
$I_1 = 5696\,cm^4$ → momento d'inerzia
$H = 20\,cm$ → altezza della trave
si trascurino le deformazioni assiali



Svolgimento

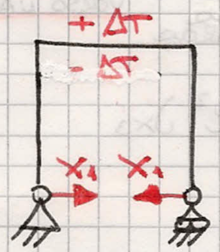
① La travatura è:

a) Isostatica per vincoli esterni

$$\begin{cases} H_A = 0 \\ (A\circlearrowleft)\ V_B \cdot l = 0 \Rightarrow V_B = 0 \\ V_A + V_B = 0 \Rightarrow V_A = -V_B = 0 \end{cases}$$

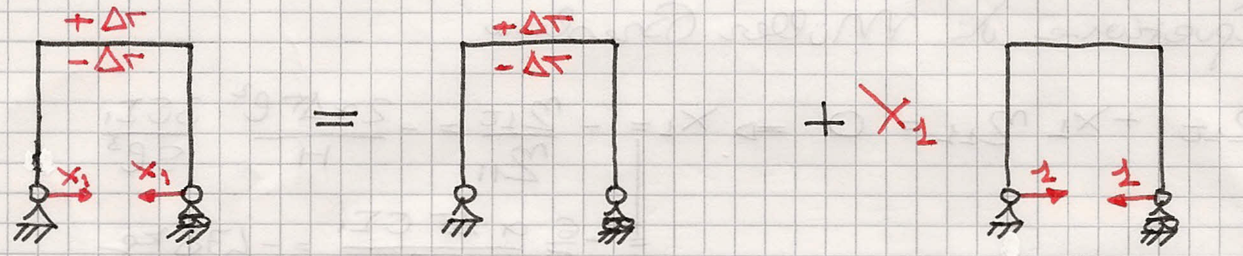
(il carico termico induce solo sforzi interni)

b) Internamente 1 volta iperstatica (vi è una maglia chiusa, con due cerniere)



② Per rendere internamente isostatica occorre "tagliare" la biella^{AB} (o—o) ed assumere quindi come incognita iperstatica lo sforzo normale nella stessa biella AB.

La travatura ottenuta è così scomponibile:

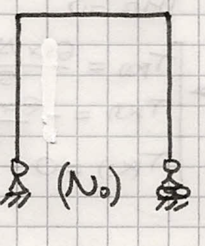


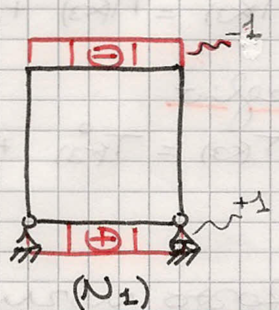
(0) SISTEMA ISOSTATICO

(1) SISTEMA AUSILIARIO

③ Sviluppo dei diagrammi di sollecitazione:

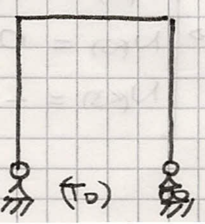
a) SFORZO NORMALE

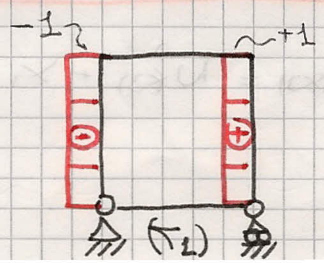




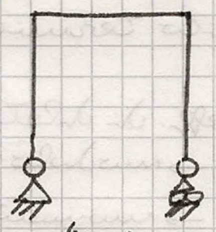
(N_1)

b) TAGLIO

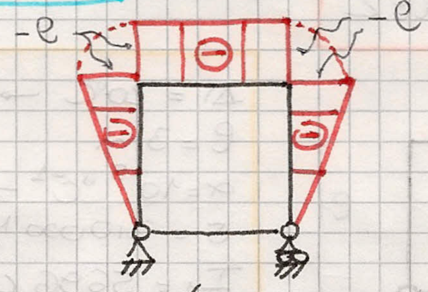




c) MOMENTO FLETTENTE



(M_0)



(M_1)

(Osservazione: Quando vi sono solo dei carichi termici allora $M_0 = 0$; $T_0 = 0$; $N_0 = 0$)

④ Calcolo dei coefficienti η (trascurando le def. assiali)

$$\eta_{1\tau} = \int_{0\,DC}^{\ell} \chi_\tau M_1 \, dx_3 = \chi_\tau \int_{0\,DC}^{\ell} M_1 \, dx_3 = -\frac{2\alpha\Delta T}{H} \int_{0\,DC}^{\ell} (-\ell) \, dx_3 = \frac{2\alpha \Delta T \ell^2}{H}$$

curvatura della trave dovuta al carico termico

negativa xché, in base al sistema di riferimento (2,3) fissato, le fibre inferiori si raffreddano mentre quelle superiori si riscaldano.

momento costante

← CURVATURA TRAVE VERSO L'ALTO

$$\eta_{11} = \frac{1}{EI_1} \int_{0\,AD}^{\ell} (-x_3)^2 \, dx_3 + \frac{1}{EI_1} \int_{0\,BC}^{\ell} (x_3)^2 \, dx_3 + \frac{1}{EI_1} \int_{0\,DC}^{\ell} \ell^2 \, dx_3$$

$$= \frac{1}{EI_1} \left[\frac{2}{3} \ell^3 + \ell^3 \right] = \frac{5}{3} \frac{\ell^3}{EI_1}$$

⑤ Equazione di Müller Breslau

$$\eta_{1\tau} + X_1 \eta_{11} = 0 \Rightarrow X_1 = -\frac{\eta_{1\tau}}{\eta_{11}} = -\frac{2\alpha\Delta T \ell^2}{H} \frac{3EI_1}{5\ell^3}$$

$$= -\frac{6}{5} \frac{\alpha \Delta T EI_1}{H\ell} = -478 \text{ kg}$$

⑥ Calcolo delle sollecitazioni totali.

- Momento flettente

$$M_{(x_3)} = M^0_{(x_3)} + X_1 M^1_{(x_3)} \longrightarrow \begin{cases} M_A = 0 \\ M_D = M_C = \dfrac{6\alpha\Delta T EI_1}{5H} = 1435 \text{ kg m} \\ M_B = 0 \end{cases}$$

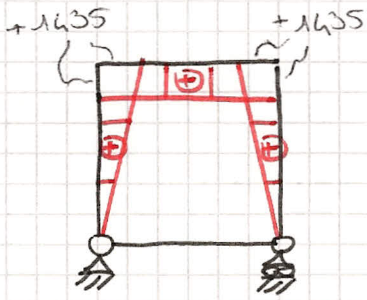
- Taglio

$$T_{(x_3)} = T^0_{(x_3)} + X_1 T^1_{(x_3)} \longrightarrow \begin{cases} T_{(x_3)} = \dfrac{6\alpha\Delta T EI_1}{5H\ell} = 478 \text{ kg} & x_3 \in \overline{AD} \\ T_{(x_3)} = -\dfrac{6\alpha\Delta T EI_1}{5H\ell} = -478 \text{ kg} & x_3 \in \overline{BC} \\ T_{(x_3)} = 0 & x_3 \in \overline{DC} \text{ e } x_3 \in \overline{AB} \end{cases}$$

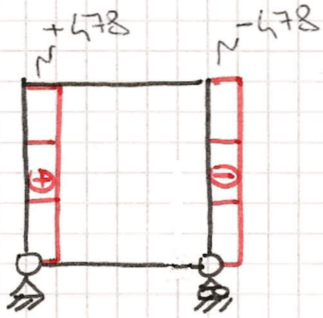
- Sforzo normale

$$N_{(x_3)} = N^0_{(x_3)} + X_1 N^1_{(x_3)} \longrightarrow \begin{cases} N_{(x_3)} = \dfrac{6\alpha\Delta T EI_1}{5H\ell} = 478 \text{ kg} & x_3 \in \overline{DC} \\ N_{(x_3)} = 0 & x_3 \in \overline{AD} \text{ e } x_3 \in \overline{BC} \\ N_{(x_3)} = -\dfrac{6\alpha\Delta T EI_1}{5H\ell} = -478 \text{ kg} & x_3 \in \overline{AB} \end{cases}$$

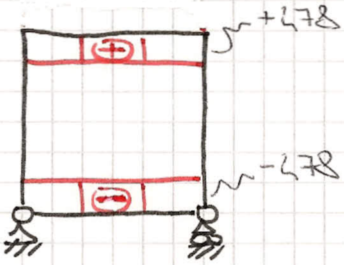
7 Grafici Totali + quotature



M (kg·m)

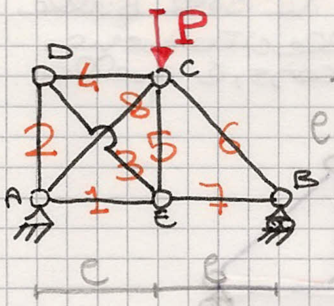


T (kg)



N (kg)

Esercizio 3



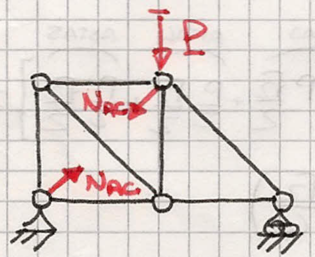
$\ell = 4\ m$
$P = 3\ t$
$E = 210000\ N/mm^2$
$A = 400\ cm^2$

Svolgimento

① La travatura è:

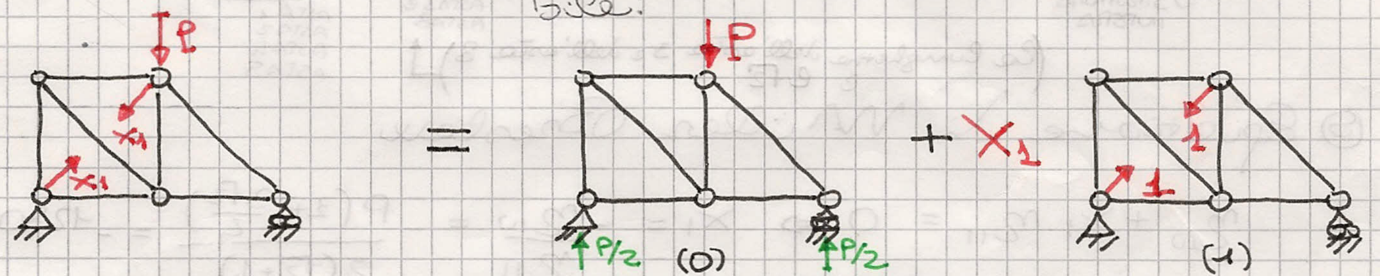
a) Isostatica per vincoli esterni, in quanto è semplicemente appoggiata

b) Internamente 1 volta iperstatica, in quanto eliminando la biella AC si ottiene una travatura reticolare a nodi canonici.



② Per rendere la travatura internamente isostatica occorre togliere la biella AC ed assumere come incognite iperstatica, lo sforzo normale in essa.

La travatura ottenuta è così scomponibile:

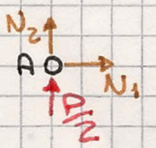


(0) SISTEMA ISOSTATICO

(1) SISTEMA AUSILIARIO

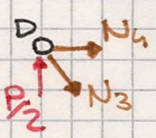
③ Analisi dello stato di sollecitazione

SISTEMA ISOSTATICO (0)

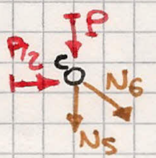


$$\begin{cases} N_1 = 0 \\ N_2 = -P/2 \end{cases}$$

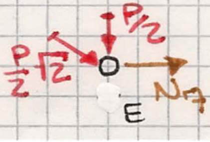
la reaz. vincolare dell'appoggio (→) è nulla



$$\begin{cases} N_3 \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{P}{2} \Rightarrow N_3 = \frac{P}{2}\sqrt{2} \\ N_4 = -N_3 \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{P}{2} \end{cases}$$



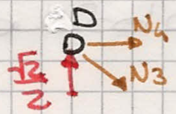
$$\begin{cases} N_6 \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{P}{2} \rightarrow N_6 = -\frac{P}{2}\sqrt{2} \\ N_5 = -P - N_6 \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{P}{2} \end{cases}$$



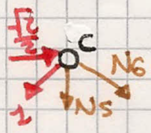
$$N_7 = \frac{P}{2}\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{P}{2}$$

SISTEMA AUSILIARIO (1)

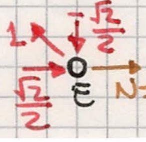
$$\begin{cases} N_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ N_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$



$$\begin{cases} N_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ N_3 = 1 \end{cases}$$



$$\begin{cases} N_6 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \\ N_5 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$



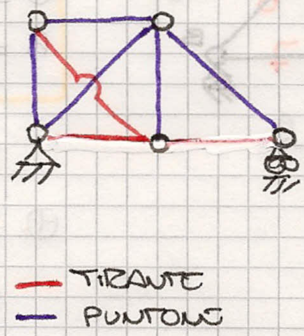
$$N_7 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

Tabelle riepilogative

ASTA	LUNGHEZ.	$N^{(0)}$	$N^{(1)}$	N (Kg)	TIPO
1	l	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	+905	TIRANTE
2	l	$-\frac{P}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-595	PUNTONE
3	$l\sqrt{2}$	$\frac{P}{2}\sqrt{2}$	1	+841	TIRANTE
4	l	$-P/2$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-595	PUNTONE
5	l	$-P/2$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-595	PUNTONE
6	$l\sqrt{2}$	$-\frac{P}{2}\sqrt{2}$	0	-2121	PUNTONE
7	l	$P/2$	0	1500	TIRANTE
8	$l\sqrt{2}$	0	1	-1280	PUNTONE

1 2

Essendo, la travatura composta da sole bielle, l'unica sollecitazione, in questo caso, è quella assiale



④ Calcolo dei coefficienti η

$$\eta_{10} = \int_{\substack{\text{STRUTTURA}\\ \text{INTERA}}} \frac{N^{(0)} N^{(1)}}{EA}\, dx_3 = \sum_{i=1}^{8} l_i \cdot \frac{N_i^{(0)} N_i^{(1)}}{EA} = l\left[\overbrace{\frac{P}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\text{ASTA 2}} + \overbrace{\sqrt{2}\,P\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\text{ASTA 3}} + \overbrace{\frac{P}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\text{ASTA 4}} + \overbrace{\frac{P}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\text{ASTA 5}}\right]\frac{1}{EA} = \frac{Pl}{EA}\left(1 + \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$\eta_{11} = \int_{\substack{\text{STRUTTURA}\\ \text{INTERA}}} \frac{{N_i^{(1)}}^2}{EA}\, dx_3 = \sum_{i=1}^{8} l_i \frac{{N_i^{(1)}}^2}{EA} = \frac{1}{EA}\left[\underbrace{2l\sqrt{2}}_{\text{ASTA 3 e ASTA 8}} + 4l\underbrace{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}_{\text{ASTA 1, ASTA 2, ASTA 4, ASTA 5}}\right] = \frac{2l}{EA}(\sqrt{2}+1)$$

(la lunghezza dell'asta 3 e dell'asta 8 è $l\sqrt{2}$)

⑤ Equazione di Müller Breslau

$$\eta_{10} + X_1\eta_{11} = 0 \Rightarrow X_1 = -\frac{\eta_{10}}{\eta_{11}} = -\frac{P\left(1+\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)}{2(\sqrt{2}+1)} = -1280\ \text{kg}$$

⑥ Lo stato di sollecitazione nella reticolare iperstatica si ~~[illegible]~~ ottiene per sovrapposizione

$$N = N^{(0)} + X_1 N^{(1)}$$

I risultati vengono riportati nella parte 2 della tabella.