GEOMETRIA DELLE AREE

1 MOMENTI STATICI o MOMENTI DEL I° ORDINE

$$S_1 = \int_A x_2 \, dA \quad ; \quad S_2 = \int_A x_1 \, dA$$

① Segno: fissato un ~~sis~~ sistema di riferimento 1,2 nelle figure i segni dei due momenti statici sono di seguito riassunti

$S_1 > 0$, $S_2 < 0$	$S_1 > 0$, $S_2 > 0$
$S_1 < 0$, $S_2 < 0$	$S_1 < 0$, $S_2 > 0$

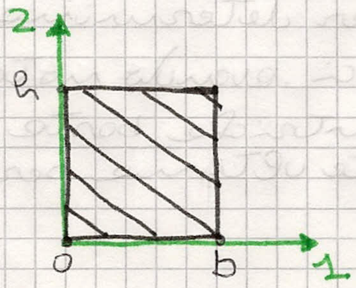
(asse verticale 2, asse orizzontale 1)

Osservazione

Una figura potrebbe stare in più di un quadrante.

② Analisi delle figure semplici

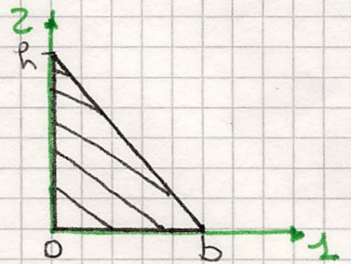
a) Rettangolo



$$S_1 = \int_A x_2 \, dA = \int_0^b \int_0^h x_2 \, dx_2 \, dx_1 = b \frac{h^2}{2}$$

$$S_2 = \int_A x_1 \, dA = \int_0^b \int_0^h x_1 \, dx_2 \, dx_1 = h \frac{b^2}{2}$$

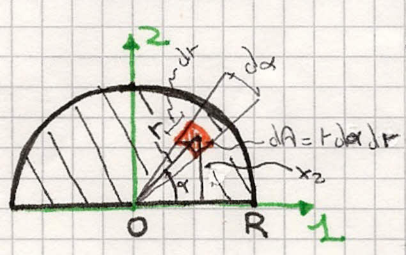
b) Triangolo



$$S_1 = \int_A x_2 \, dA = \frac{1}{6} b h^2$$

$$S_2 = \int_A x_1 \, dA = \frac{1}{6} b^2 h$$

c) Semicerchio (in coordinate polari)

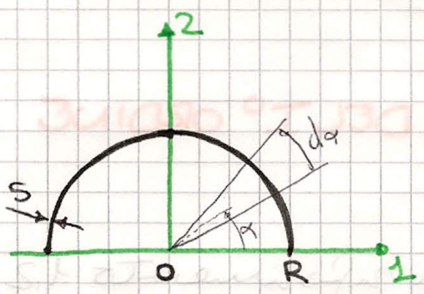


$$S_1 = 2 \int_0^R \int_0^{\pi/2} \overbrace{r \operatorname{sen}\alpha}^{x_2} \, r \, d\alpha \, dr = 2 \left(\int_0^R r^2 dr \right) \left(\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\alpha \, d\alpha \right)$$

$$= 2 \frac{R^3}{3} \left[-\cos\alpha \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} R^3$$

$$S_2 = \int_0^R \int_0^{\pi/2} \overbrace{r \cos\alpha}^{x_1} \, r \, d\alpha \, dr - \int_0^R \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \cos\alpha \, r \, d\alpha \, dr = 0$$

d) Semicirconferenza



spessore circonferenza

$$S_1 = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} R\,\mathrm{sen}\,\alpha\; s\; R\,d\alpha = 2sR^2$$

③ Utilità nella geometria delle aree.

I momenti statici vengono impiegati per la determinazione delle coordinate baricentriche, nel sistema di riferimento usato per il loro calcolo

$$x_{1G} = \frac{S_2}{A} \qquad x_{2G} = \frac{S_1}{A}$$

Con A = area della figura per la quale si vuol determinare il baricentro.

Osservazione: Analogamente per determinare i momenti statici, avendo note le coordinate baricentriche, basta moltiplicare queste ultime per l'area della figura.

2 MOMENTI D'INERZIA

$$I_1 = \int_A x_2^2 \, dA$$

$$I_2 = \int_A x_1^2 \, dA$$

$$I_{12} = \int_A x_1 x_2 \, dA$$

Momento d'inerzia polare:

$$I_0 = I_1 + I_2 = \int_A (x_2^2 + x_1^2) \, dA$$

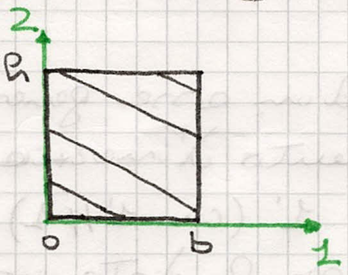
① Segno

I_1 e I_2 sono sempre positivi

I_{12} dipende dalla posizione della figura.

② Analisi di figure semplici

a) Rettangolo

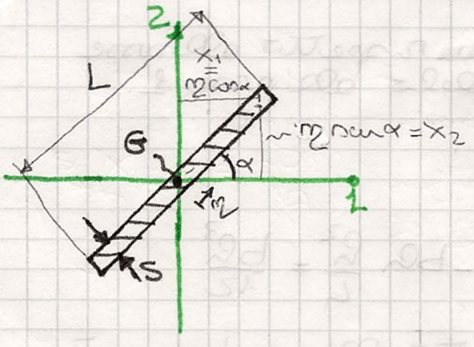


$$I_1 = \int_0^b \int_0^h x_2^2 \, dA = \frac{bh^3}{3}$$

$$I_2 = \int_0^b \int_0^h x_1^2 \, dA = \frac{hb^3}{3}$$

$$I_{12} = \int_0^b \int_0^h x_1 x_2 \, dA = \frac{b^2 h^2}{4}$$

b) Asta



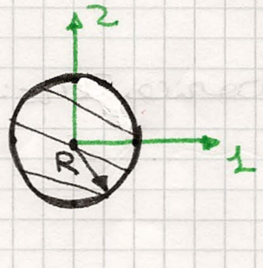
$$I_1 = 2\int_0^{L/2} \underbrace{(\eta \,\mathrm{sen}\,\alpha)^2}_{x_2^2} \underbrace{s\,d\eta}_{dA} = 2s\,\mathrm{sen}^2\alpha \int_0^{L/2} \eta^2 \, d\eta$$

$$2s\,\mathrm{sen}^2\alpha \, \frac{1}{3}\left(\frac{L}{2}\right)^3 = \frac{sL^3}{12} (\mathrm{sen}^2\alpha)$$

$$I_2 = \frac{sL^3}{12} (\cos^2\alpha)$$

$$I_{12} = 2s \int_0^{L/2} (\eta \cos\alpha)(\eta \,\mathrm{sen}\,\alpha) \, d\eta = \frac{sL^3}{12} \,\mathrm{sen}\,\alpha \cos\alpha$$

c) Cerchio

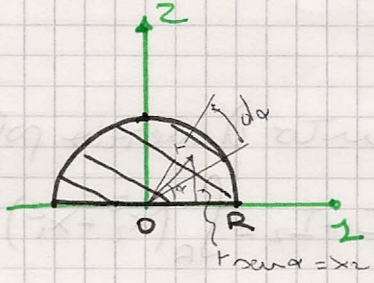


In coordinate polari:

$$I_1 = I_2 = \frac{I_0}{2} = \frac{\pi}{4} R^4$$

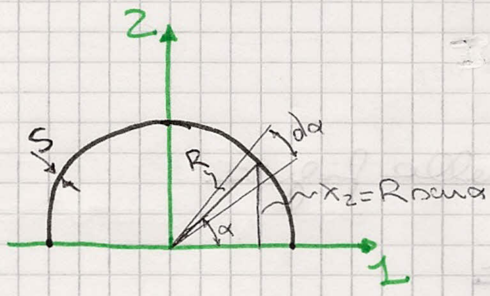
$$I_0 = \int_A (x_1^2 + x_2^2) \, dA = \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 \, r \, dr \, d\alpha = 2\pi \frac{R^4}{4} = \frac{\pi}{2} R^4$$

d) Semicerchio



$$I_1 = 2\int_0^R \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r \operatorname{sen}\alpha)^2 \, r \, d\alpha \, dr = 2\int_0^R r^3 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen}\alpha)^2 d\alpha = 2\,\frac{R^4}{4}\left[-\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi R^4}{8}$$

e) Semicirconferenza



$$I_1 = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (R \operatorname{sen}\alpha)^2 \, S R \, d\alpha = 2SR^3 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2\alpha \, d\alpha = 2SR^3 \left[\frac{\alpha}{2} - \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} S R^3$$

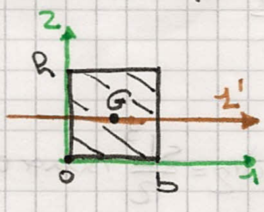
• Teorema del Trasporto

Il momento d'inerzia rispetto ad un asse generico 1 è pari alla somma del momento d'inerzia fatto rispetto all'asse baricentrico 1' (con 1' // 1), con il prodotto dell'area della figura per la distanza al quadrato di 1÷1'.

$$I_1 = I_{1'} + A\left(d_{11'}\right)^2$$

momento d'inerzia rispetto all'asse baricentrico 1', parallelo all'asse 1.

Con riferimento al rettangolo:



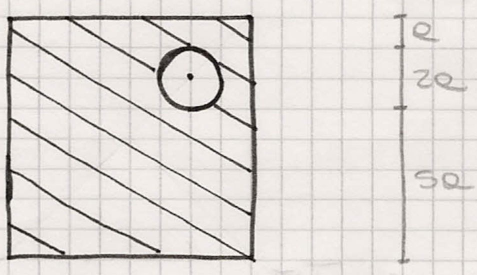
$$I_{1'} = I_1 - A\left(d_{11'}\right)^2 = \frac{bh^3}{3} - bh\,\frac{h^2}{4} = \frac{bh^3}{12}$$

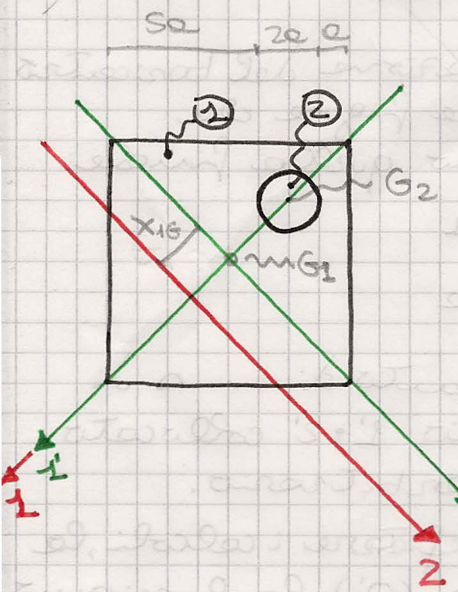
momento d'inerzia rispetto all'asse baricentrico 1'

Momento centrifugo rispetto al baricentro:

$$I_{1'2'} = I_{12} - A\left(x_{G1} \cdot x_{G2}\right)$$

2) Piastra forata





Svolgimento:

① Determinazione del baricentro delle singole figure che compongono quella finale.

fig. 1 → G_1

fig. 2 → G_2

② Inserimento di un sistema di riferimento 1';2' collocato in modo arbitrario.
Per semplificare i calcoli la sua origine la facciamo coincidere con G_1.

③ Calcolo dei momenti statici:

$$S_{1'} = S_{1'}^{(1)} - S_{1'}^{(2)} = 0$$ ← sia G_1 che G_2 sono collocati sull'asse 1'

la fig. 2 viene tolta alla 1

$$S_{2'} = S_{2'}^{(1)} - S_{2'}^{(2)} = 0 - \Big[\underbrace{-\pi a^2}_{\text{area}} \underbrace{(2a\sqrt{2})}_{\text{distanza di } G_2 \text{ da } 2'} \Big] = 2\pi a^3 \sqrt{2}$$

la figura 2 è totalmente interna ai quadranti di $S_{2'} < 0$

④ Calcolo del baricentro della figura totale.

$$x_{1G} = \frac{S_{2'}}{A} = \frac{\pi a^2 (2a\sqrt{2})}{64a^2 - \pi a^2} = + \frac{a\, 2\pi\sqrt{2}}{64 - \pi}$$

$$x_{2G} = \frac{S_{1'}}{A} = 0$$

⑤ Gli assi principali d'inerzia sono 1 e 2; i relativi momenti di inerzia vengono così calcolati:

$$I_1 = \frac{1}{12}\, 8a\, (8a)^3 - \frac{\pi a^4}{4} = \left(1024 - \frac{\pi}{4}\right) a^4 \simeq 1023\, a^4$$

$$I_2 = \left[\frac{1}{12}\, 8a\, (8a)^3 + 64a^2 \left(a \frac{\pi 2\sqrt{2}}{64-\pi}\right)^2\right] - \left[\frac{\pi a^4}{4} + \pi a^2 \left(2\sqrt{2}a + \frac{a\pi 2\sqrt{2}}{64-\pi}\right)^2\right]$$

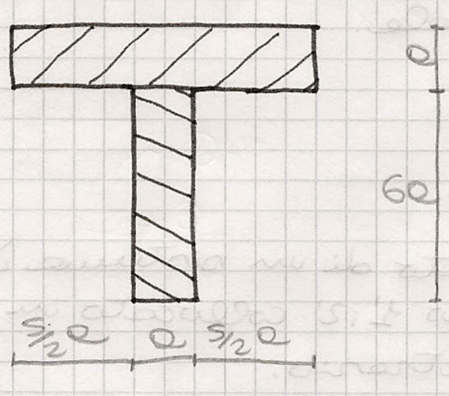
$$= a^4 \left[1024 + \frac{512\pi^2}{(64-\pi)^2}\right] - \pi a^4 \left[\frac{1}{4} + 8 + \frac{\pi^2 8}{(64-\pi)^2} + \frac{16\pi}{(64-\pi)}\right]$$

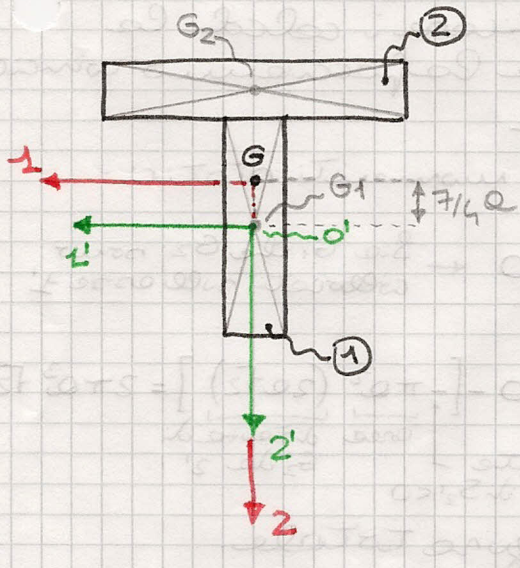
$$= a^4 \left[1024 - \frac{1}{4} - 8 + \frac{504\pi^2}{(64-\pi)^2} - \frac{16\pi}{64-\pi}\right] \simeq 1016\, a^4$$

Esercizi

Calcolare i momenti principali di inerzia per le seguenti figure:

1) Sezione a T





Svolgimento:

① Determinazione del baricentro delle singole figure che compongono quella finale:

fig. 1 → G_1

fig. 2 → G_2

② Inserimento di un s. di riferimento 1';2' collocato in modo arbitrario.
Per semplificare i calcoli, la sua origine (O') la facciamo coincidere con G_1.

③ Calcolo dei momenti statici

$$S_{1'} = S_{1'}^{(1)} + S_{1'}^{(2)} = 0 + \Big[\underbrace{-6a \cdot a}_{\text{area di (2)}} \underbrace{\left(3a + \frac{a}{2}\right)}_{\text{distanza di } G_2 \text{ da } 1'}\Big] = -21a^3$$

perché 1' passa nel baricentro della figura (1)

cade nel quadrante di $S_1 < 0$

$$S_{2'} = S_{2'}^{(1)} + S_{2'}^{(2)} = 0$$ ← perché sia G_1 che G_2 sono collocati sull'asse 2'

④ Calcolo del baricentro della figura totale.

$$x_{1G} = S_{2'}/A_{tot} = 0$$

$$x_{2G} = S_{1'}/A_{tot} = -21a^3/12a^2 = -\frac{7}{4}a$$

⑤ Gli assi principali d'inerzia sono 1 e 2; i relativi momenti d'inerzia vengono così calcolati:

$$I_1 = \left[\frac{1}{12}a(6a)^3 + 6a \cdot a\left(\frac{7}{4}a\right)^2\right] + \left[\frac{1}{12}a^3 \cdot 6a + 6a \cdot a\left(\frac{7}{4}a\right)^2\right] = \frac{221}{4}a^4$$

$\simeq 55\,a^4$

$$I_2 = \frac{1}{12}a(6a)^3 + \frac{1}{12}6a\,a^3 = \frac{37}{2}a^4 \simeq 18\,a^4$$