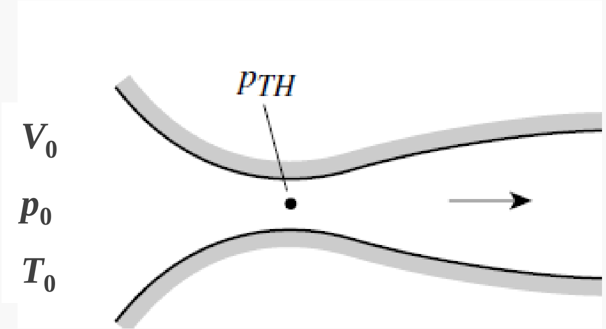
Flusso isentropico, monodimensionale, stazionario, comprimibile di un gas perfetto in un condotto fisso di area variabile

Flusso isentropico, monodimensionale, di un gas perfetto in un condotto di area variabile



Equazione di bilancio di massa in condizioni stazionarie (1):

$$\dot{M} = \rho V A = \text{cost.}$$

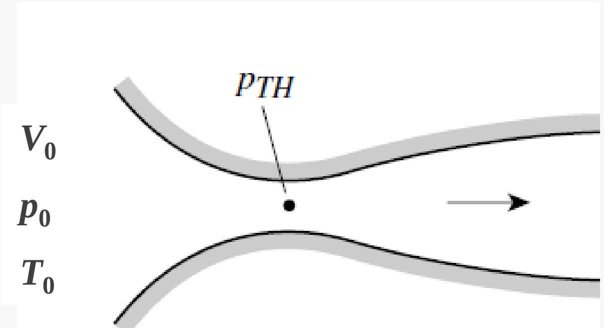
da cui (2):

$$\rho V dA + \rho A dV + VA\, d\rho = 0$$

Dividendo membro a membro la (2) con la (1), si ottiene (3):

$$\frac{dA}{A} + \frac{dV}{V} + \frac{d\rho}{\rho} = 0$$

Flusso isentropico, monodimensionale, di un gas perfetto in un condotto di area variabile



Equazione di bilancio dell'energia in condizioni stazionarie (4):

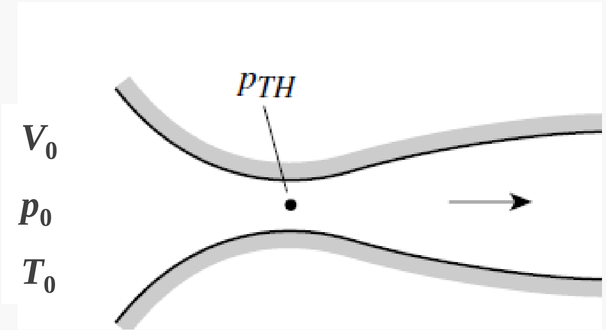
$$VdV + \frac{dp}{\rho} = 0 \;\Rightarrow\; VdV = -\frac{dp}{\rho}$$

da cui (5):

$$VdV = -\frac{dp}{\rho}\frac{d\rho}{d\rho} = -V_s^2\frac{d\rho}{\rho} \;\Rightarrow\; \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{V^2}{V_s^2}\frac{dV}{V} = -M^2\frac{dV}{V}$$

$\frac{dp}{d\rho}$ = V_s^2

Flusso isentropico, monodimensionale, di un gas perfetto in un condotto di area variabile



Equazione di bilancio dell'energia in condizioni stazionarie (4):

$$VdV + \frac{dp}{\rho} = 0 \Rightarrow VdV = -\frac{dp}{\rho}$$

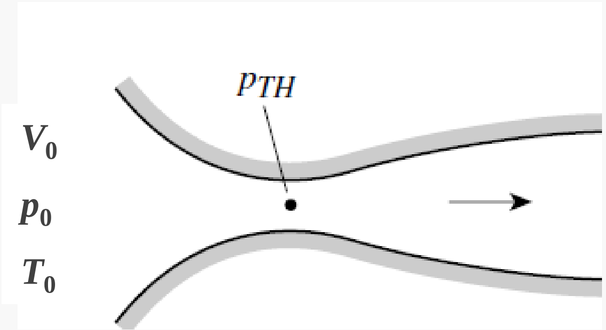
da cui (5):

$$VdV = -\frac{dp}{\rho}\frac{d\rho}{d\rho} = -V_s^2 \frac{d\rho}{\rho} \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{V^2}{V_s^2}\frac{dV}{V} = -M^2 \frac{dV}{V}$$

che sostituita in $\frac{dA}{A} + \frac{dV}{V} + \frac{d\rho}{\rho} = 0$ fornisce (6):

$$\frac{dV}{V}\left(1 - M^2\right) = -\frac{dA}{A}$$

Flusso isentropico, monodimensionale, di un gas perfetto in un condotto di area variabile



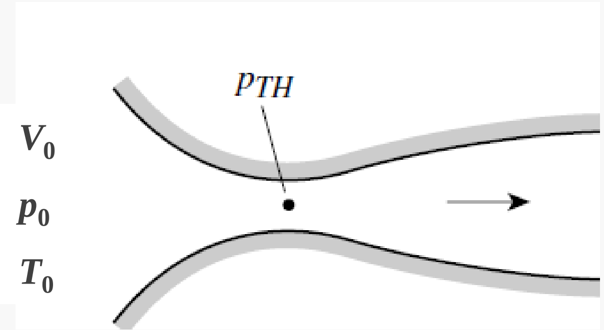
$$\frac{dV}{V}\left(1-M^2\right)=-\frac{dA}{A}$$

$$M<1 \quad \begin{cases} dA>0 \Rightarrow dV<0 \\ dA<0 \Rightarrow dV>0 \end{cases}$$

$$M>1 \quad \begin{cases} dA>0 \Rightarrow dV>0 \\ dA<0 \Rightarrow dV<0 \end{cases}$$

$$M=1 \Leftrightarrow dA=0 \qquad \left(A=A_{min}\right)$$

Flusso isentropico, monodimensionale, di un gas perfetto in un condotto di area variabile



$$\frac{T_0}{T} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)$$

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}$$

Temperatura, pressione, densità e velocità in una generica sez. del condotto hanno le seguenti espressioni:

$$V = \sqrt{2\, c_p \left(T_0 - T\right)} = \sqrt{2\, c_p\, T_0 \left(1 - \frac{T}{T_0}\right)} = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1} \gamma\, R\, T_0 \left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}}\right]}$$

Flusso isentropico, monodimensionale, di un gas perfetto in un condotto di area variabile

La portata in massa ha la seguente espressione:

$$\dot{M} = \rho\, V A = \frac{p}{RT} V A = \frac{p}{p_0}\frac{p_0}{T_0}\frac{T_0}{RT} V A$$

$$\frac{T_0}{T} = \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

$$V = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}\gamma\, R\, T_0\left[1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]}$$

Flusso isentropico, monodimensionale, di un gas perfetto in un condotto di area variabile

La portata in massa ha la seguente espressione:

$$\dot{M} = \rho\, V A = \frac{p}{RT} V A = \frac{p}{p_0}\frac{p_0}{T_0}\frac{T_0}{RT} V A =$$

$$= \frac{p_0}{\sqrt{T_0}}\, A \sqrt{\frac{\gamma}{R} \cdot \frac{2}{\gamma - 1}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{2}{\gamma}} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]}$$

$$\frac{p}{p_0} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$$

Flusso isentropico, monodimensionale, di un gas perfetto in un condotto di area variabile

La portata in massa ha la seguente espressione:

$$\dot{M} = \rho\, V A = \frac{p}{RT} V A = \frac{p}{p_0}\frac{p_0}{T_0}\frac{T_0}{RT} V A =$$

$$= \frac{p_0}{\sqrt{T_0}}\, A \sqrt{\frac{\gamma}{R}\cdot\frac{2}{\gamma-1}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{2}{\gamma}}\left[1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]} =$$

$$= \frac{p_0}{\sqrt{T_0}}\, A \sqrt{\frac{\gamma}{R}}\frac{M}{\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}}$$

Flusso isentropico, monodimensionale, di un gas perfetto in un condotto di area variabile: condizioni critiche

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)_{M=1} = \left(\frac{p}{p_0}\right)_{\text{cr}} = \frac{p*}{p_0} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\frac{p}{p_0} = \frac{1}{\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$$

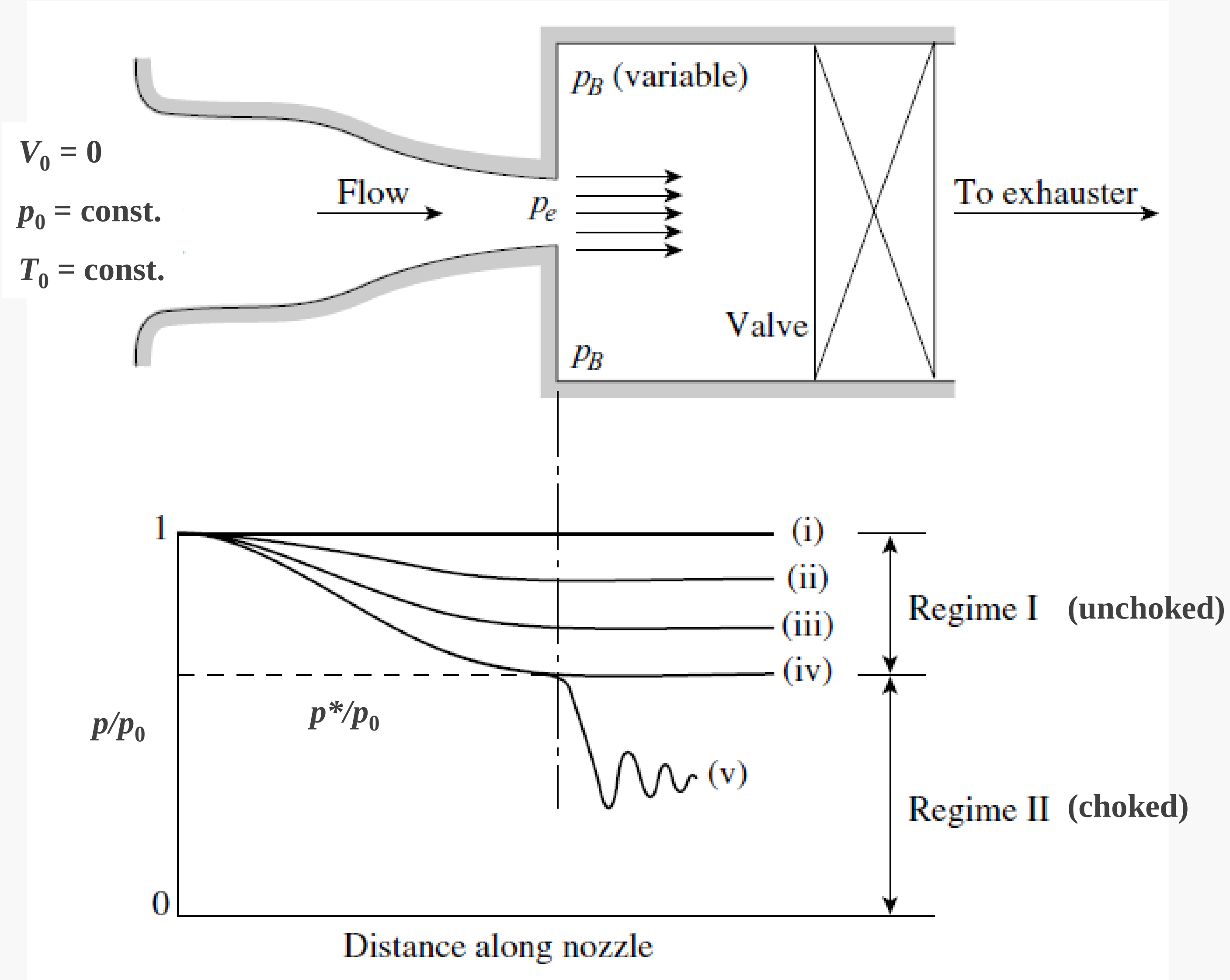
Flusso isentropico, monodimensionale, di un gas perfetto in un condotto di area variabile: condizioni critiche

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)_{M=1} = \left(\frac{p}{p_0}\right)_{\text{cr}} = \frac{p*}{p_0} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

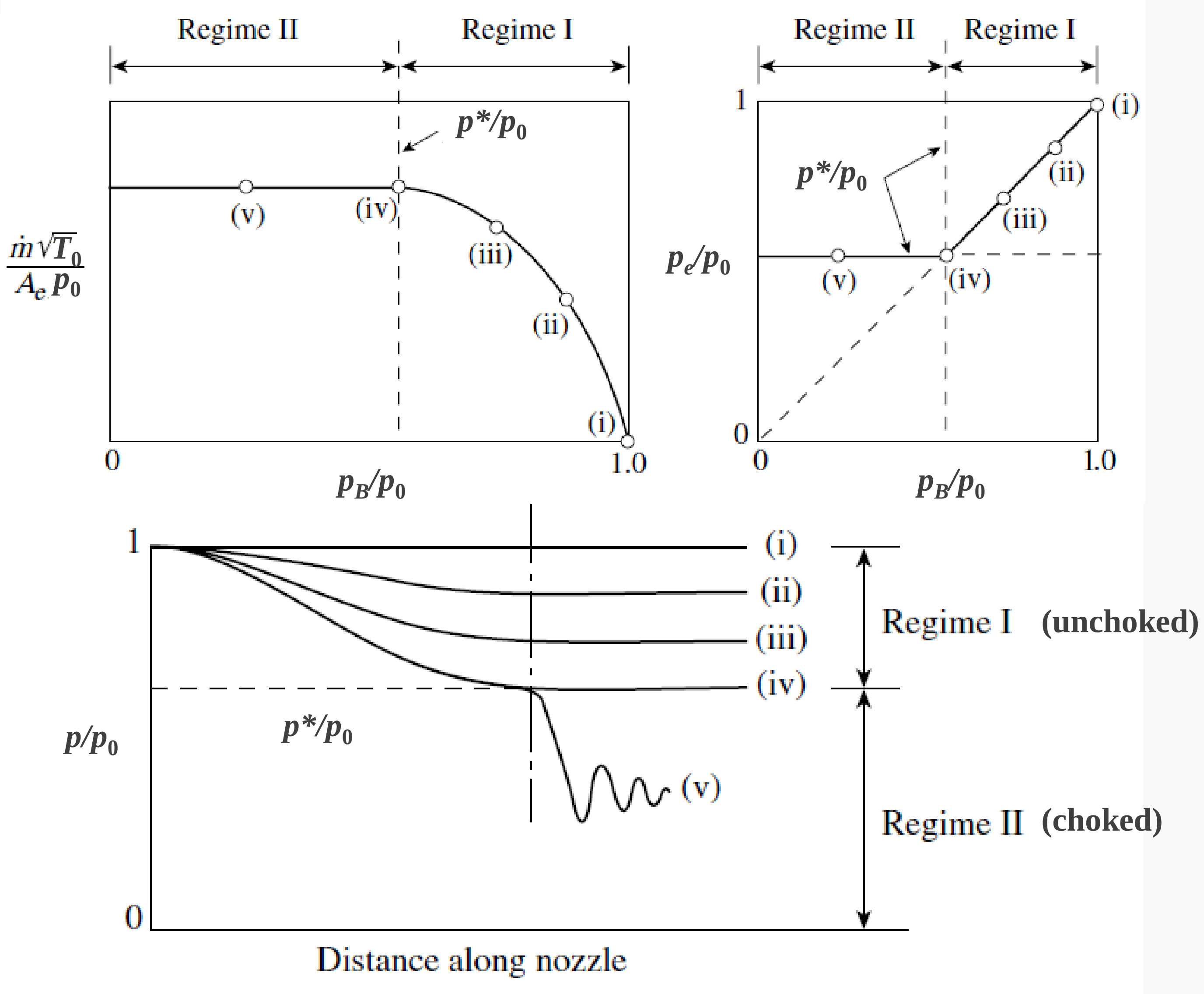
$$\left(\dot{M}\right)_{M=1} = \frac{p_0}{\sqrt{T_0}} A \sqrt{\frac{\gamma}{R} \cdot \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}}$$

$$\dot{M} = \frac{p_0}{\sqrt{T_0}} A \sqrt{\frac{\gamma}{R} \cdot \frac{2}{\gamma-1} \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{2}{\gamma}} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]} = \frac{p_0}{\sqrt{T_0}} A \sqrt{\frac{\gamma}{R}} \frac{M}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}}$$

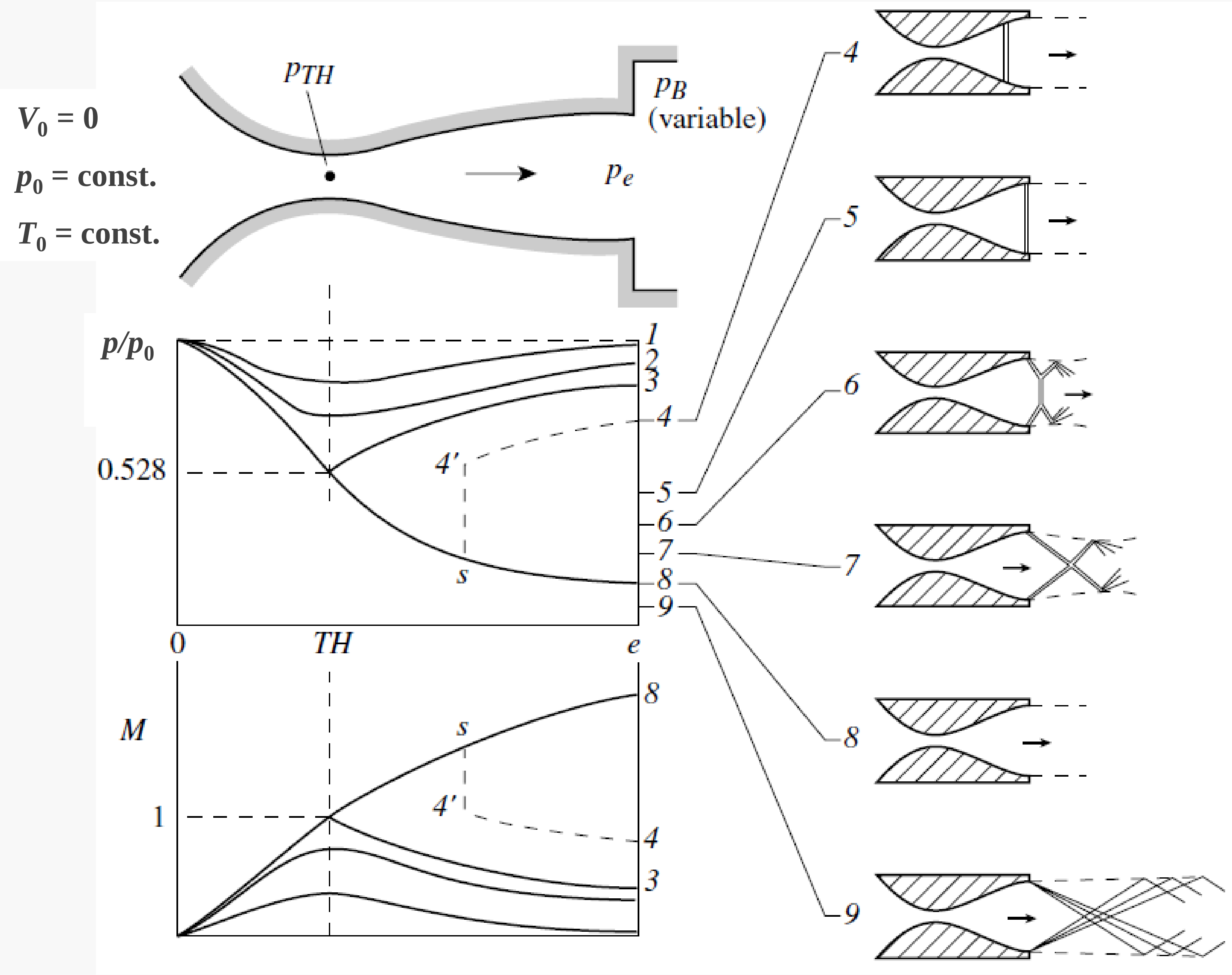
Comportamento di un condotto convergente al variare delle condizioni a valle



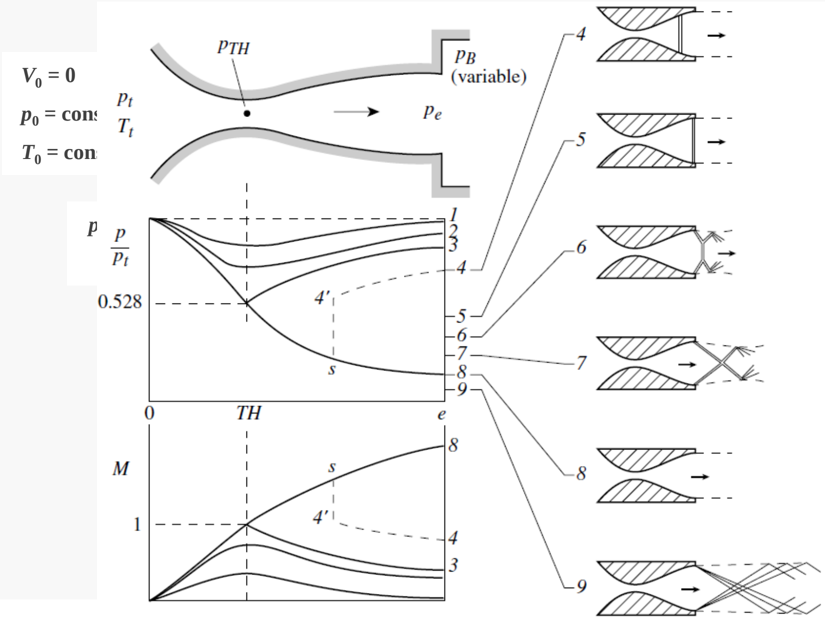
Comportamento di un condotto convergente al variare delle condizioni a valle



Comportamento di un condotto convergente-divergente al variare delle condizioni a valle

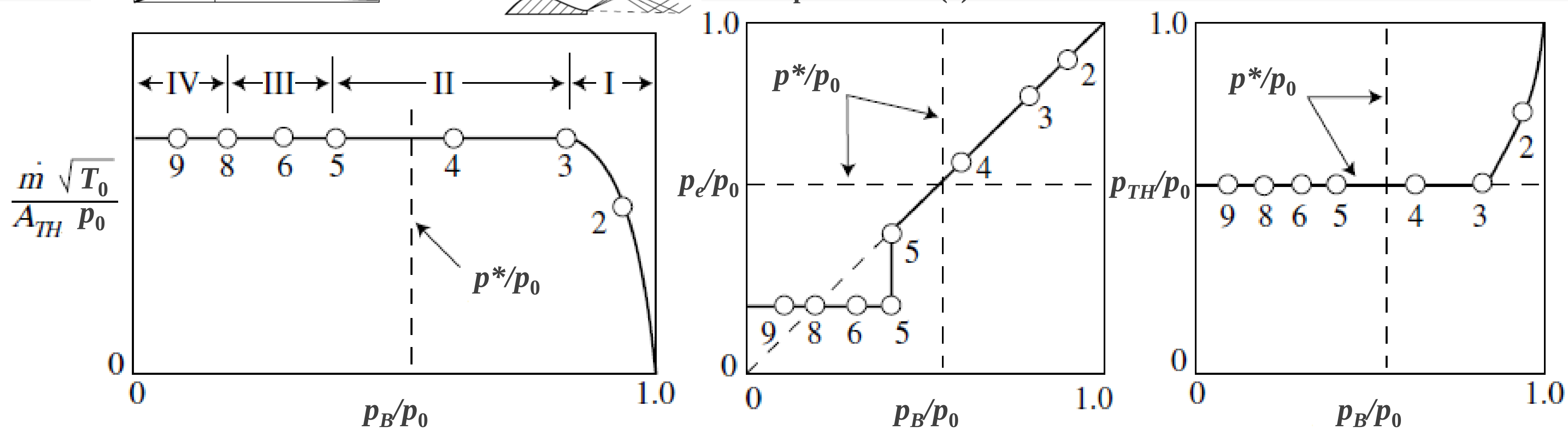


Comportamento di un condotto convergente-divergente al variare delle condizioni a valle

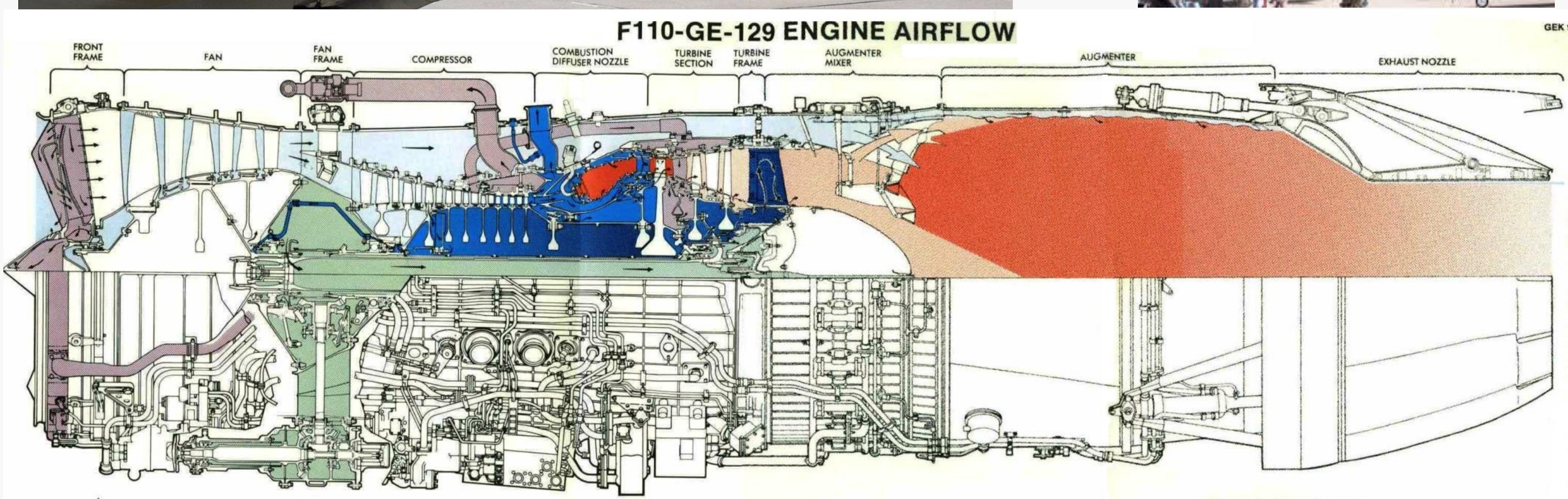


overexpanded flow (6, 7)

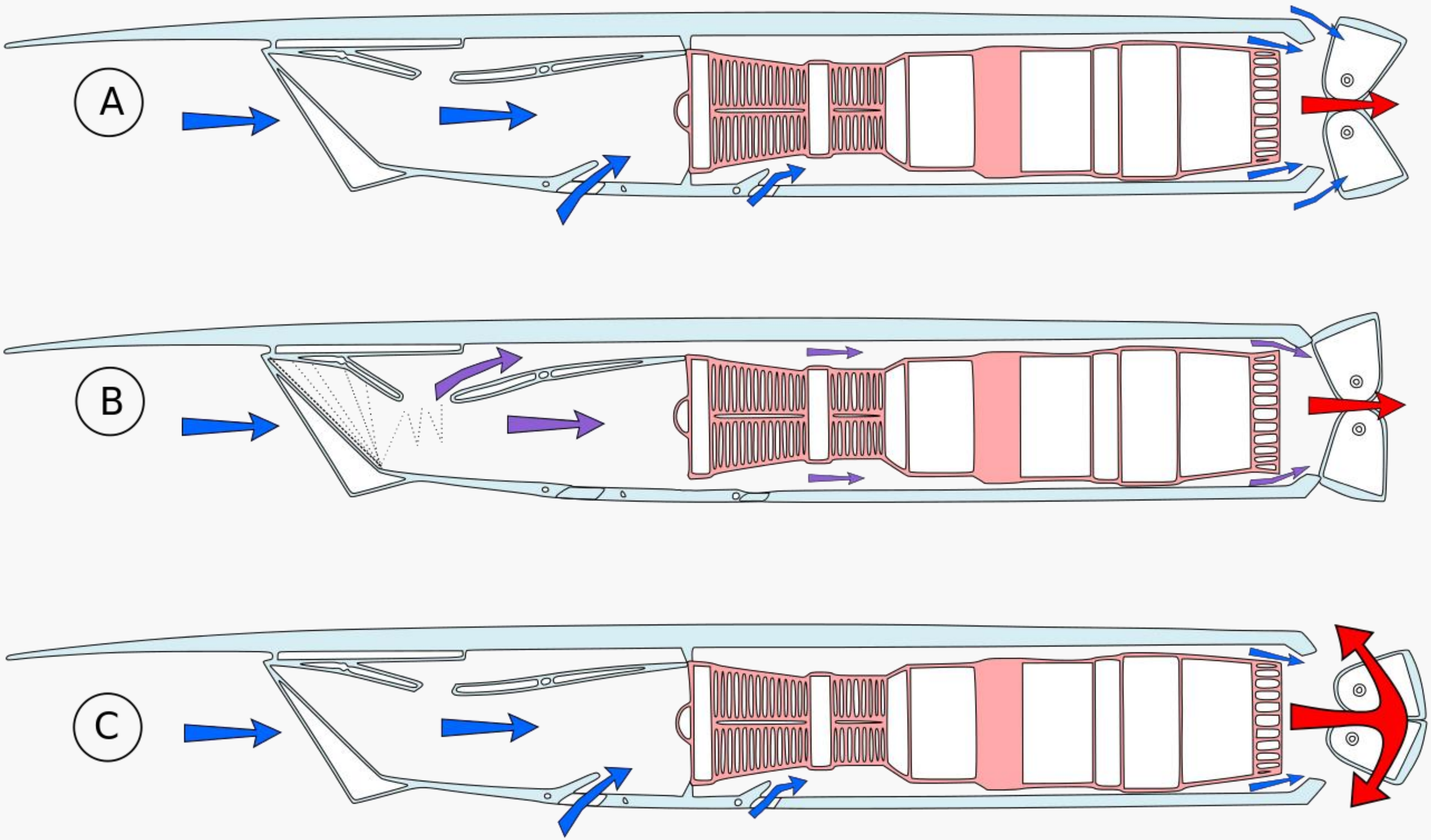
underexpanded flow (9)



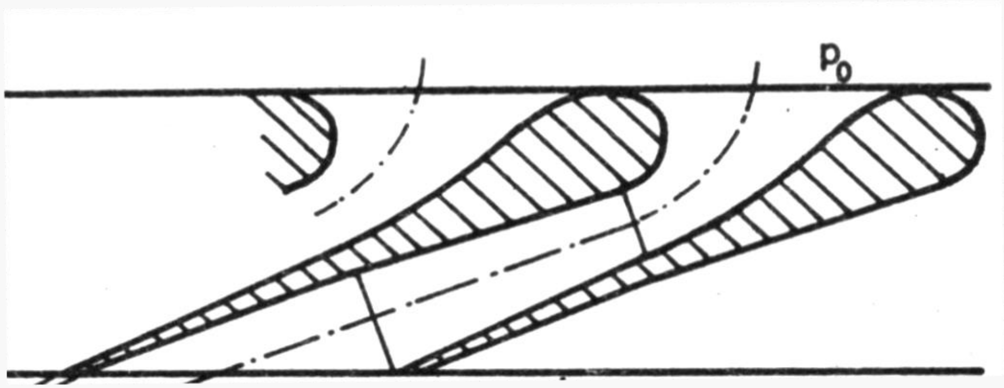
Ugello di spinta a geometria variabile

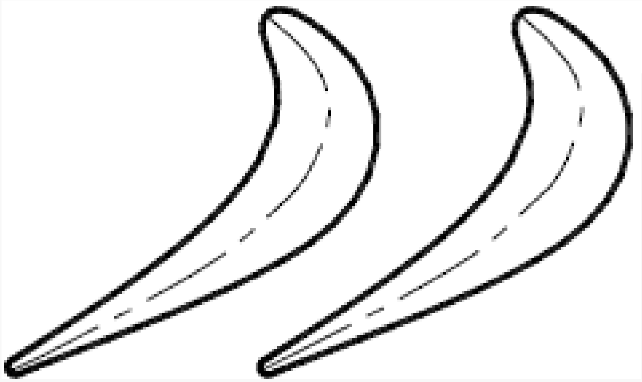


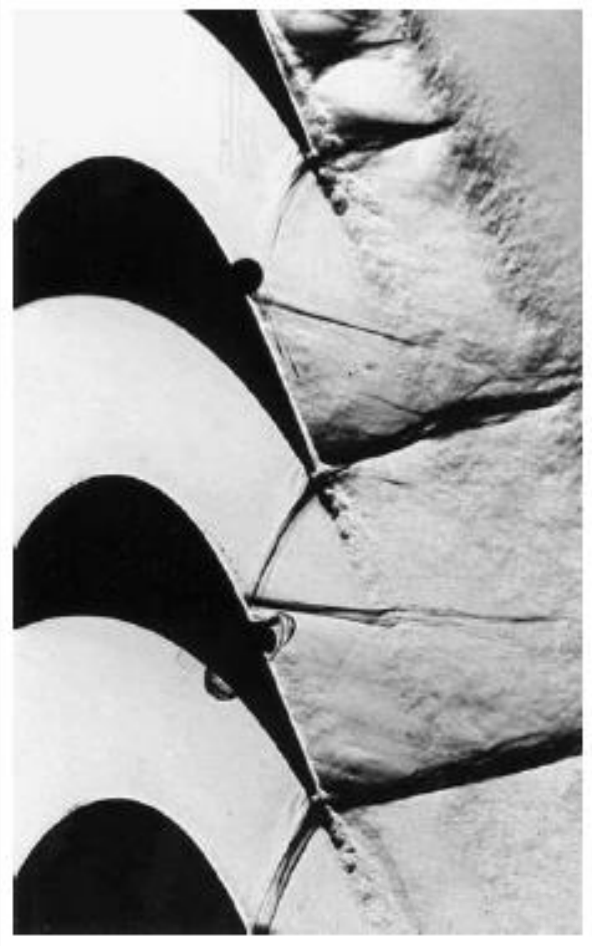
Ugello di spinta a geometria variabile



Ugello di turbina







Schiera di turbina con numero di Mach all'uscita $M_u = 1.15$

Flusso isentropico, monodimensionale, di un gas perfetto in un condotto di area variabile

La velocità massica ha la seguente espressione:

$$\frac{\dot{M}}{A} = \rho V = \frac{p}{RT} V = \frac{p}{p_0} \frac{p_0}{T_0} \frac{T_0}{RT} V$$

$$V = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1} \gamma R T_0 \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]}$$

$$\frac{T_0}{T} = \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

Flusso isentropico, monodimensionale, di un gas perfetto in un condotto di area variabile

La velocità massica ha la seguente espressione:

$$\frac{\dot{M}}{A} = \rho V = \frac{p}{RT} V = \frac{p}{p_0} \frac{p_0}{T_0} \frac{T_0}{RT} V =$$

$$= \frac{p_0}{\sqrt{T_0}} \sqrt{\frac{\gamma}{R} \cdot \frac{2}{\gamma - 1} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{2}{\gamma}} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]}$$

$$\frac{p}{p_0} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}}$$

Flusso isentropico, monodimensionale, di un gas perfetto in un condotto di area variabile

La velocità massica ha la seguente espressione:

$$\frac{\dot{M}}{A} = \rho V = \frac{p}{RT} V = \frac{p}{p_0} \frac{p_0}{T_0} \frac{T_0}{RT} V =$$

$$= \frac{p_0}{\sqrt{T_0}} \sqrt{\frac{\gamma}{R} \cdot \frac{2}{\gamma - 1} \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{2}{\gamma}} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}}\right]} =$$

$$= \frac{p_0}{\sqrt{T_0}} \sqrt{\frac{\gamma}{R}} \frac{M}{\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}}$$

La funzione $\frac{\dot{M}}{A} = \mathrm{F}(M)$ presenta un massimo per $M = 1$

Flusso isentropico, monodimensionale, di un gas perfetto in un condotto di area variabile: condizioni critiche

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)_{\left(\frac{\dot M}{A}\right)_{\text{MAX}}} = \left(\frac{p}{p_0}\right)_{M=1} = \left(\frac{p}{p_0}\right)_{\text{cr}} = \frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\left(\frac{\dot M}{A}\right)_{\text{MAX}} = \left(\frac{\dot M}{A}\right)_{M=1} = \frac{\dot M}{A_{\text{cr}}} = \frac{\dot M}{A^*} = \frac{p_0}{\sqrt{T_0}}\sqrt{\frac{\gamma}{R}\cdot\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}}$$

$$\frac{\dot M}{A} = \frac{p_0}{\sqrt{T_0}}\sqrt{\frac{\gamma}{R}\cdot\frac{2}{\gamma-1}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{2}{\gamma}}\left[1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]} = \frac{p_0}{\sqrt{T_0}}\sqrt{\frac{\gamma}{R}}\frac{M}{\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}}$$

Flusso isentropico, monodimensionale, di un gas perfetto in un condotto di area variabile: condizioni critiche

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)_{\left(\frac{\dot{M}}{A}\right)_{\mathrm{MAX}}} = \left(\frac{p}{p_0}\right)_{M=1} = \left(\frac{p}{p_0}\right)_{\mathrm{cr}} = \frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\left(\frac{\dot{M}}{A}\right)_{\mathrm{MAX}} = \left(\frac{\dot{M}}{A}\right)_{M=1} = \frac{\dot{M}}{A_{\mathrm{cr}}} = \frac{\dot{M}}{A^*} = \frac{p_0}{\sqrt{T_0}}\sqrt{\frac{\gamma}{R}\cdot\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}}$$

$$\frac{A}{A_{\mathrm{cr}}} = \frac{\dfrac{\dot{M}}{A_{\mathrm{cr}}}}{\dfrac{\dot{M}}{A}}$$

$$\frac{\dot{M}}{A} = \frac{p_0}{\sqrt{T_0}}\sqrt{\frac{\gamma}{R}\cdot\frac{2}{\gamma-1}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{2}{\gamma}}\left[1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]} = \frac{p_0}{\sqrt{T_0}}\sqrt{\frac{\gamma}{R}}\frac{M}{\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}}$$

Flusso isentropico, monodimensionale, di un gas perfetto in un condotto di area variabile: condizioni critiche

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)_{\left(\frac{\dot{M}}{A}\right)_{\mathrm{MAX}}} = \left(\frac{p}{p_0}\right)_{M=1} = \left(\frac{p}{p_0}\right)_{\mathrm{cr}} = \frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\left(\frac{\dot{M}}{A}\right)_{\mathrm{MAX}} = \left(\frac{\dot{M}}{A}\right)_{M=1} = \frac{\dot{M}}{A_{\mathrm{cr}}} = \frac{\dot{M}}{A^*} = \frac{p_0}{\sqrt{T_0}}\sqrt{\frac{\gamma}{R}\cdot\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}}$$

$$\frac{A}{A_{\mathrm{cr}}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}}{\frac{2}{\gamma-1}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{2}{\gamma}}\left[1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]}} = \frac{1}{M}\left[\frac{2}{\gamma+1}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)\right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

Flusso isentropico, monodimensionale, di un gas perfetto in un condotto di area variabile