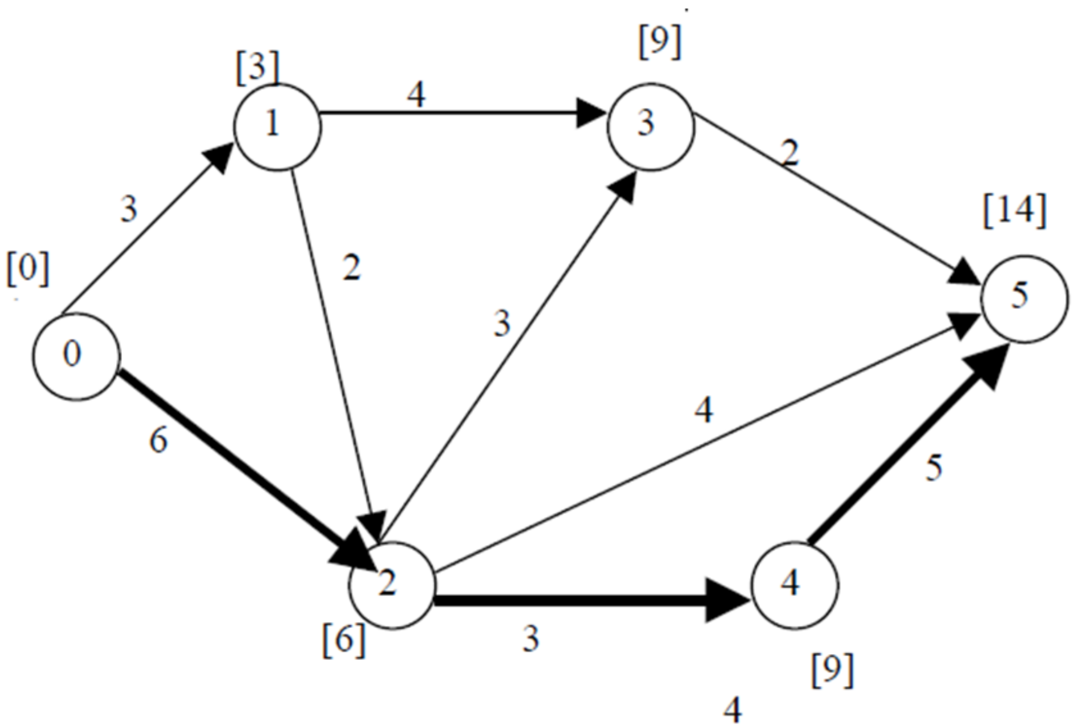
Metodo PERT per il controllo dell'avanzamento di un progetto esecutivo

Sia dato il seguente progetto formato da 6 eventi, 0 è l'evento iniziale e 5 è l'evento finale del progetto:

Attività	(0,1)	(0,2)	(1,2)	(1,3)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(3,5)	(4,5)
Durata t_{ij}	3	6	2	4	3	3	4	2	5

Costruiamo il reticolo; posta eguale a zero la data iniziale, al vertice 1 associamo $t_1 = 3$, al vertice 2, che è di arrivo di due attività, associamo $t_2 = 6$, che è il valore maggiore fra 0+6 e 3+2.



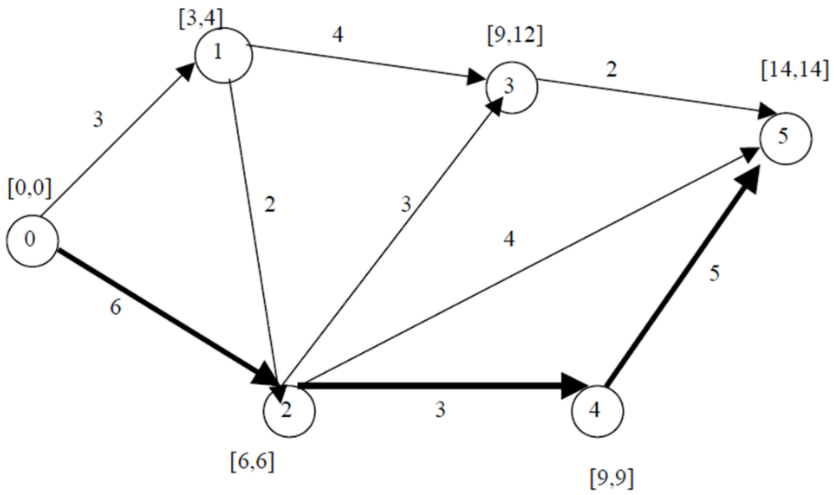
Il cammino critico è quello che collega i vertici 0-2-4-5 e nella figura è rappresentato dalla linea più marcata. È molto importante concentrare l'attenzione sulle attività critiche, sia in fase di progettazione per esaminare se è possibile ridurne la durata, sia durante l'esecuzione del progetto, perché ogni eventuale ritardo di una di esse determina un ritardo nel compimento dell'intero progetto, mentre le attività non critiche sono flessibili ed entro certi limiti possono ammettere dei ritardi.

Oltre alle durate finora introdotte si calcolano altre durate, tempi al più tardi t^*_i , che non sono altro che i tempi che si associano ai vertici partendo dalla data finale del progetto e sottraendo le durate delle attività. Il tempo al più tardi di un vertice indica la data massima ammissibile per l'inizio delle attività che partono da quel vertice in modo da non causare ritardi al compimento del progetto. Il "tempo al più presto" viene calcolato tenendo conto delle attività che stanno a monte dell'evento, mentre il "tempo al più tardi" viene calcolato tenendo conto delle attività che stanno a valle dell'evento.

Nei vertici critici i due tempi coincidono in quanto non si può ritardare l'inizio delle attività critiche che partono da essi, ragion per cui si approfondisce l'analisi dei tempi, sia per i vertici, sia per le attività. Per un vertice la differenza tra i due tempi è detta tempo di slittamento concatenato $(Sc)_i$ (tale intervallo nei vertici critici è zero). Il tempo di slittamento concatenato dell'evento indica quanto ritardo sia possibile tollerare nel raggiungere l'evento senza ritardare il completamento del progetto. Si potrebbe anche definire cammino critico un percorso nel reticolo attraverso i vertici che hanno tempo di slittamento nullo.

slittamento concatenato $(Sc)_i$ = "tempo al più tardi"$_i$ - "tempo al più presto"$_i$ = $t^*_i - t_i$

Nell'esempio, al vertice 4 è associato il tempo al più tardi $t^*_4 = 9$, al vertice 3 il tempo al più tardi $t^*_3 = 12$, al vertice 1 ,dal quale escono le due attività A12 e A13 è associato il tempo al più tardi $t^*_1 = 4$ (minimo fra 6-2 e 12-4);



I tempi di slittamento sono dati dalla seguente tabella:

VERTICI	ti	t*i	(Sc)i
0	0	0	0
1	3	4	1
2	6	6	0
3	9	12	3
4	9	9	0
5	14	14	0

Nei vertici con slittamento non nullo si ha un intervallo di tempo entro cui è possibile terminare le attività che arrivano in essi o iniziare le attività che partono da essi, senza ripercussione sulla data finale. Per quanto riguarda le attività si possono calcolare i cosiddetti margini, o scorrimenti, che rappresentano intervalli di tempo in cui ogni singola attività, che non sia critica, può essere ritardata. Sia Aik l'attività che inizia dal vertice i e termina nel vertice k; si definiscono gli slittamenti (o margini):

slittamento libero = $t_k - t_i - t_{ik}$; slittamento totale = $t^*_k - t_i - t_{ik}$

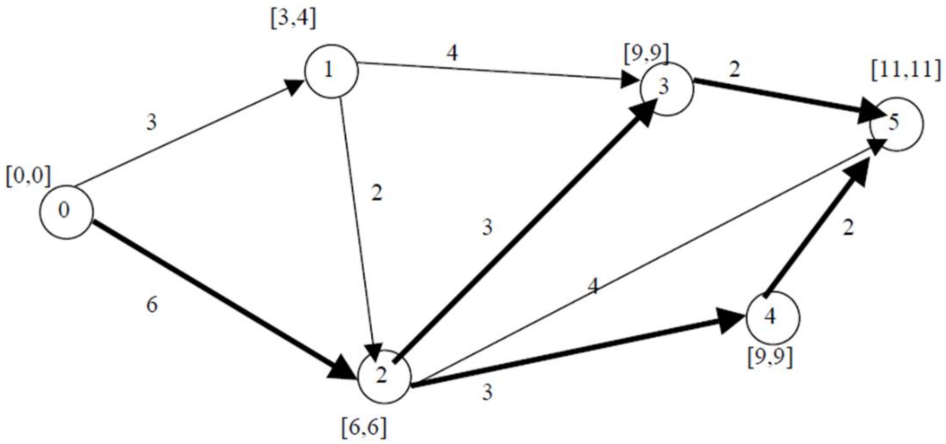
Lo slittamento totale è il massimo intervallo di tempo di cui può disporre un'attività senza modificare la data di termine del progetto, ma se è sfruttato completamente può condizionare l'inizio delle attività successive. Le attività critiche hanno slittamento totale nullo; mentre le attività non critiche hanno slittamento totale non nullo e proprio per l'esistenza di tale slittamento possono essere ritardate, o terminate prima, o eseguite in un tempo maggiore. Queste diverse possibilità danno origine ad un risparmio nel costo. Lo slittamento libero è proprio dell'attività e rappresenta la quantità di tempo disponibile che può esser e utilizzata senza disturbare la durata del progetto, purché non sia stata spostata la data del "tempo al più presto" del suo evento iniziale.

Nel reticolo precedente si hanno i seguenti slittamenti:

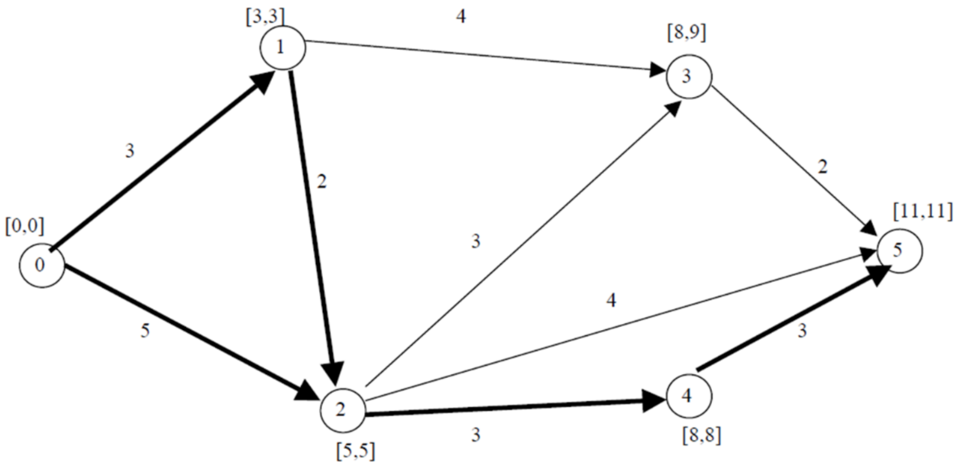
ATTIVITÀ	SLITTAMENTO LIBERO	SLITTAMENTO TOTALE
(0,1)	0	1
(0,2)	0	0
(1,2)	1	1
(1,3)	2	5
(2,3)	0	3
(2,4)	0	0
(2,5)	4	4
(3,5)	3	3
(4,5)	0	0

L'attività A13 ha slittamento totale 5, quindi può iniziare dopo 5 unità di tempo e terminare al tempo 12, in questo modo ,però, l'attività A35 non ha più possibilità di margine. L'attività A35 ha uno slittamento libero 3, purché le attività che giungono nel vertice 3 siano state completate al tempo 9. Uno dei problemi che ci si può porre è quello di cercare di ridurre la durata del progetto; questo è possibile solo se diminuisce la durata delle attività critiche; però tutto questo comporta uno sforzo maggiore e soprattutto un costo maggiore. Inoltre si deve ridurre il tempo di certe attività in modo da non aumentare il numero delle attività critiche, o aumentarlo il meno possibile.

Nell'esempio si può vedere come si può ridurre di 3 unità di tempo la durata del lavoro. Se applichiamo la riduzione dell'attività A45 e A35 portandola a 2 unità di tempo, diventano critiche le attività A23 e A35 come si evince dal nuovo reticolo:



Se invece si riduce di 2 unità la durata dell'attività A45 e di 1 unità la durata dell'attività A02 ,diventano critiche le attività A01 e A12, così come si evince dal nuovo reticolo:



In ognuno dei due casi aumenta il numero delle attività critiche da controllare, e pertanto occorre decidere se questa riduzione è conveniente, senza tenere conto che in questo caso si ha un aumento dei costi.

PERT con dati aleatori o "statistico"

Finora abbiamo trattato del metodo PERT attribuendo alle varie attività delle durate certe, ma nella realtà le durate delle varie attività sono quasi sempre, o per meglio dire sempre, aleatorie e pertanto le loro distribuzioni si possono solamente ottenere mediante le rilevazioni statistiche. Per poter effettuare questo vengono richiesti tre valori:

- la durata ottimistica indicata con a;
- la durata pessimistica indicata con b;
- la durata più probabile , detta anche durata normale, indicata con m.

Matematicamente, tre stime come queste descrivono una distribuzione di probabilità Beta. Questi tre valori permettono di determinare la durata attesa di ogni attività tramite la seguente formula:

Tempo previsto (valore atteso) = (tempo Ottimistico + 4*tempo più probabile + tempo Pessimistico)/6

ovvero

$$t_e = \frac{a + 4m + b}{6}$$

La durata è una variabile aleatoria e quindi occorre associare a tale valore medio la varianza, che dipende dall'intervallo di indecisione b - a ; la varianza è data da:

$$\sigma^2 = \left(\frac{b-a}{6} \right)^2$$

e misura il grado di incertezza della durata prevista dell'attività. La varianza è uguale a zero solo se a = b.
Sommando tutte le durate medie t_e delle attività del cammino critico si ottiene la durata totale D_T:

$$D_T = t_{e1} + t_{e2} + . . . + t_{ek}$$

se k sono le attività critiche.
La varianza totale si può ottenere come la somma delle varianze delle attività critiche in quanto la somma di più variabili aleatorie tende a distribuirsi secondo la distribuzione normale avente per media la somma delle medie e per varianza la somma delle varianze. Perciò la varianza totale del progetto è data dalla seguente formula:

$$\sigma_T^{\,2} = \sum \quad \sigma^2_{\;(crit\;)}$$

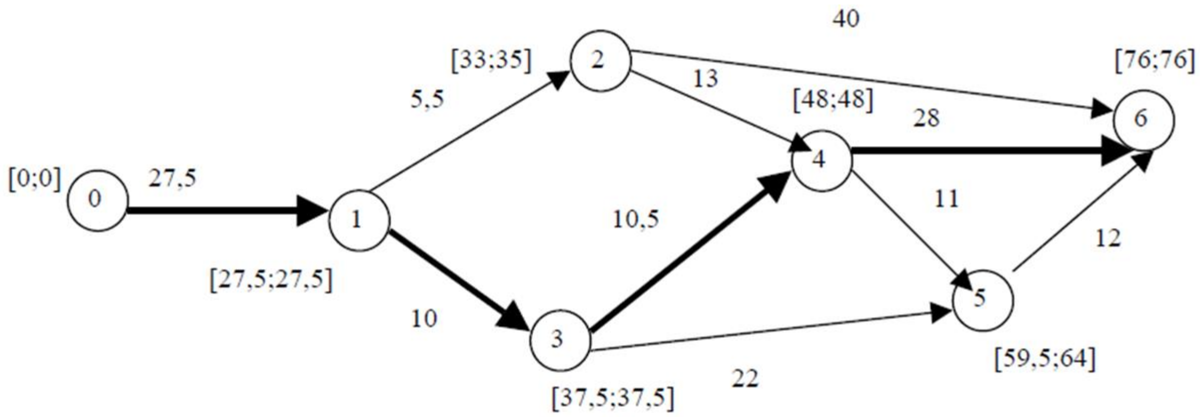
Se indichiamo con D una durata totale ipotizzata del progetto, si può, utilizzando le tavole della distribuzione normale, valutare il grado di attendibilità, calcolando la probabilità che la variabile aleatoria D = durata totale del progetto assuma quel valore.

Esempio
Dato il seguente progetto con le stime delle durate, calcolare il cammino critico, la durata totale, lo scarto quadratico medio e valutare il grado di attendibilità del progetto se si vuole che la durata sia non superiore a 70 unità di tempo, o non superiore a 85 unità di tempo. Calcoliamo i tempi medi con l'espressione

$$t_e = \frac{a + 4m + b}{6}$$

Attività	(0,1)	(1,2)	(1,3)	(2,4)	(2,6)	(3,4)	(3,5)	(4,5)	(4,6)	(5,6)
a	10	3	10	8	20	7	12	4	28	
m	25	5	10	12	40	10	21	10	28	12
b	55	10	10	22	60	16	36	22	28	18
t_e	27,5	5,5	10	13	40	10,5	22	11	28	12

Tracciamo il reticolo e determiniamo il cammino critico:



-

Quindi la durata totale con i tempi medi delle attività critiche è:

$$D_T = 27{,}5 + 10 + 10{,}5 + 28 + = 76 \text{ (unità di tempo)}$$

Calcoliamo le varianze delle attività critiche:

$$\sigma^2_{\;(0,1)} = \mathbf{56{,}25} \qquad \sigma^2_{\;(1,3)} = \mathbf{0} \qquad \sigma^2_{\;(3,4)} = \mathbf{2{,}25} \qquad \sigma^2_{\;(4,6)} = \mathbf{0}$$

da cui ricaviamo lo scarto quadratico medio relativo al cammino critico:

$$\sigma^2 = \sqrt{56{,}25 + 2{,}25} = \sqrt{58{,}50} \cong \mathbf{7{,}65}$$

Per trovare il di attendibilità per una durata ipotizzata $D_i \leq 70$ si passa alla variabile normale standardizzata:

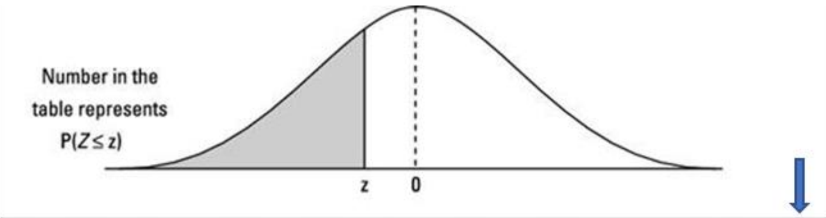
$$Z = \frac{D_i - D_T}{\sigma^2}$$

Si ha :

per $D_i = 70$

$$Z = \frac{D_i - D_T}{\sigma^2} = \frac{70 - 76}{7{,}65} = -0{,}79$$

$P(D_i \leq 70) = P(Z \leq 0{,}79) = 0{,}2148$

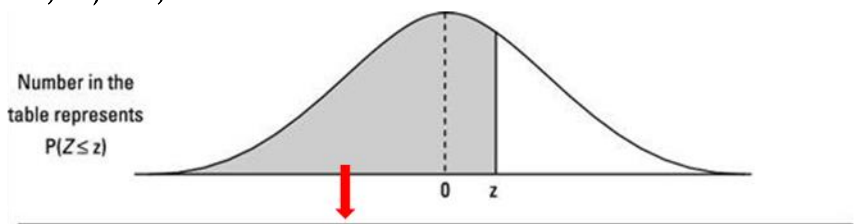


z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
–3.6	.0002	.0002	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001
–3.5	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002
–3.4	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002
–3.3	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003
–3.2	.0007	.0007	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005
–3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007
–3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010
–2.9	.0019	.0018	.0018	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
–2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
–2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
–2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
–2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
–2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
–2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
–2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
–2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
–2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
–1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
–1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
–1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
–1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
–1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
–1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
–1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
–1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
–1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
–1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
–0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
–0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
–0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.217	.2148
–0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
–0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776

per D_i = 85

$$Z = \frac{D_i - D_T}{\sigma^2} = \frac{85 - 76}{7{,}65} = 1{,}43$$

$P(D_i \leq 85) = P(Z \leq 1{,}43) = 0{,}9238$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997

Quindi vi è la probabilità del 21,48% che la durata totale del progetto D_i non superi il tempo di 70 unità, mentre la probabilità che la durata non superi il tempo di 85 unità è dell’92,36%.