

Nome, Cognome

Matricola

ANALISI MATEMATICA A & B
– PROVA SCRITTA DEL 21 FEBBRAIO 2022 –

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA – A.A. 2021/2022

Libri, appunti e calcolatrici non ammessi

PRIMA PARTE

- Lo studente scriva solo la risposta, direttamente su questo foglio.
- La seconda parte verrà corretta **esclusivamente** nel caso che lo studente risponda correttamente ad almeno 5 domande su 10 della prima parte.
- Ogni esercizio vale 2 punti, in caso di risposta corretta.

Esercizio 1. Si dica per quali valori del parametro α la serie seguente risulta convergente

$$\sum_{n=2}^{\infty} \log \left(\frac{n^\alpha + 2n + 1}{n^\alpha} \right) \quad \alpha > 2$$

Esercizio 2. Si scriva l'equazione del piano tangente al grafico della funzione $f(x, y) = \arctan(x^2 + y)$ nel punto $(0, 1, \pi/4)$.

$$z = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(y - 1)$$

Esercizio 3. Data la direzione $\omega = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ e la funzione $f(x, y) = \arcsin(xy)$, si calcoli la derivata di f rispetto alla direzione ω nel punto $(0, 1)$

$$\frac{\partial f}{\partial \omega}(0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Esercizio 4. Si trovino sup ed inf della funzione $f(x) = \frac{1}{x} - \log \frac{1}{x}$ sull'intervallo $(0, 2]$

$$\sup_{x \in (0, 2]} f(x) = +\infty \quad \inf_{x \in (0, 2]} f(x) = f(1) = 1$$

Esercizio 5. Si calcoli la curvatura κ_γ dell'arco di cicloide $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ con $t \in [\pi, 2\pi]$, nei punti in cui questo è possibile

$$\kappa_\gamma(t) = -\frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos t}} \quad \text{per } t \in [\pi, 2\pi).$$

Esercizio 6. Si dia una superficie ϕ il cui sostegno coincida con l'insieme $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$

$$\phi(t, s) = (2 \sin \varphi \cos \vartheta + 1, 2 \sin \varphi \sin \vartheta, 2 \cos \varphi) \quad (\vartheta \in \varphi) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$$

Esercizio 7. Si calcoli il lavoro del campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y) = (1 - e^x \cos y, e^x \sin y)$ lungo un qualsiasi cammino regolare che va da $(0, 0)$ a $(1, 1)$

$$L = 2 - e \cos(1)$$

Esercizio 8. Si dia lo sviluppo di Taylor all'ordine 3 centrato in $x = 0$ con resto di Peano della funzione

$$\frac{1}{1 + x + x^3} = 1 - x + x^2 - 2x^3 + o(x^3)$$

Esercizio 9. Si calcoli il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{\sin(x + x^3) - x} = \frac{2}{5}$$

Esercizio 10. Si calcoli il flusso del campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z) = (e^z \cos y, e^x z + 2y, z)$ attraverso una sfera di raggio 1 e centro $(0, 0, 1)$

$$\Phi_{\mathbf{F}} = 4\pi$$

SECONDA PARTE

Lo studente scriva lo svolgimento di ogni esercizio su un foglio a parte.

*In questa parte **non** verranno ritenute valide risposte corrette, ma prive di giustificazione.*

Esercizio 11 (7 punti). *Si calcoli il momento di inerzia dell'insieme*

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, 1 \leq z \leq 2\},$$

rispetto all'asse delle z .

Esercizio 12 (7 punti). *Si consideri la funzione di due variabili*

$$f(x, y) = 3x^2y - y^3,$$

sull'insieme

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Si trovino i punti critici di f in E , classificandoli. Si determinino inoltre

$$\min_E f \quad e \quad \max_E f.$$