Nome, Cognome ....

Matricola ....

ANALISI MATEMATICA
– PROVA SCRITTA –

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA – A.A. 2017/2018

`Libri, appunti e calcolatrici` non ammessi

PRIMA PARTE

- Lo studente scriva solo la risposta, direttamente su questo foglio.

- La seconda parte verrà corretta **esclusivamente** *nel caso che lo studente risponda correttamente ad almeno 5 domande su 10 della prima parte.*

- Ogni esercizio vale 2 punti, in caso di risposta corretta.

Esercizio 1. *Calcolare la lunghezza L dell'arco di spirale logaritmica, data in forma parametrica da* $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$, *con* $t \in [0, 2\pi]$

$$L = \sqrt{2}\,(e^{2\pi} - 1)$$

Esercizio 2. *Si calcoli il seguente limite*

$$\lim_{n\to\infty} n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n} \left(\sqrt{n^2+1} - n\right) = \frac{1}{2\,e^2}$$

Esercizio 3. *Dire per quali* $\alpha > 0$ *la serie seguente risulta convergente*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{1}{\dfrac{1}{n^\alpha} - \log\left(1 + \dfrac{1}{n^\alpha}\right)} \qquad 0 < \alpha < \frac{1}{2}$$

Esercizio 4. *Si calcoli la derivata di* $f(x, y) = \arcsin(x + y + 1)$ *nel punto* $(0, -1)$ *nella direzione* $\omega = (\sqrt{3}/2, -1/2)$

$$\frac{\partial f}{\partial \omega}(0, -1) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

Esercizio 5. *Dire quali tra i seguenti sottoinsiemi di* $\mathbb{R}^2$ *rappresentano una curva regolare (nessuno)*

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, e^{x+y^2} + y^2 = 0\} \qquad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y^2 - x^4 = 0\} \qquad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^3 + y^3 - 3\,x\,y = 0\}$$

Esercizio 6. *Si calcoli il limite seguente*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1 + x + x^3) - \sin^3 x - \log(1 + x)}{\left(\sqrt[3]{(1 + x^2)^2} - \cos(x^2)\right)^2} = -\frac{9}{4}$$

Esercizio 7. *Si trovino massimo e minimo della funzione* $f(x, y) = x^3 - y^3$ *sull'insieme* $E = \{(x, y) \,:\, x^2 + y^2 \leq 1\}$

$$\max_E f = 1 \qquad\qquad \min_E f = -1$$

Esercizio 8. *Dire quali tra le seguenti serie numeriche risultano convergenti*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(1/n)}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi\,n)}{\sqrt[10]{n}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(12)^n}{n!}$$

Esercizio 9. *Si scriva l'equazione del piano tangente al grafico della funzione* $f(x, y) = \arccos(x + y + 2)$ *nel punto* $(-1, -1, \pi/2)$.

$$z = \frac{\pi}{2} - 2 - x - y$$

Esercizio 10. *Dire per quale* $a \in \mathbb{R}$ *il seguente campo vettoriale è conservativo su* $\mathbb{R}^2$

$$\left(\frac{x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{y\,(a\,y + x^2 + 1) + a\,(x^2 + 1)}{(x^2 + y^2 + 1)\,(x^2 + 1)}\right) \qquad a = 0$$

Seconda parte

Lo studente scriva lo svolgimento di ogni esercizio su un foglio a parte.

In questa parte **non** *verranno ritenute valide risposte corrette, ma prive di giustificazione.*

Esercizio 11 (7 punti)**.** *Sia $E \subset \mathbb{R}^2$ l'insieme*

$$E = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq x^2 + y^2 \leq e,\, x \geq 0 \text{ e } x \leq y \leq \sqrt{3}\,x\Big\}.$$

Si calcoli l'integrale doppio

$$\iint_E \frac{y}{x} \log(x^2 + y^2)\, dx\, dy.$$

Soluzione. Osserviamo innanzitutto che l'insieme di integrazione E si può descrivere in coordinate polari come

$$E = \Big\{(\varrho, \vartheta) \,:\, 0 \leq \varrho \leq \sqrt{e},\, \frac{\pi}{4} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{3}\Big\},$$

si veda la figura sotto. Usando le coordinate polari

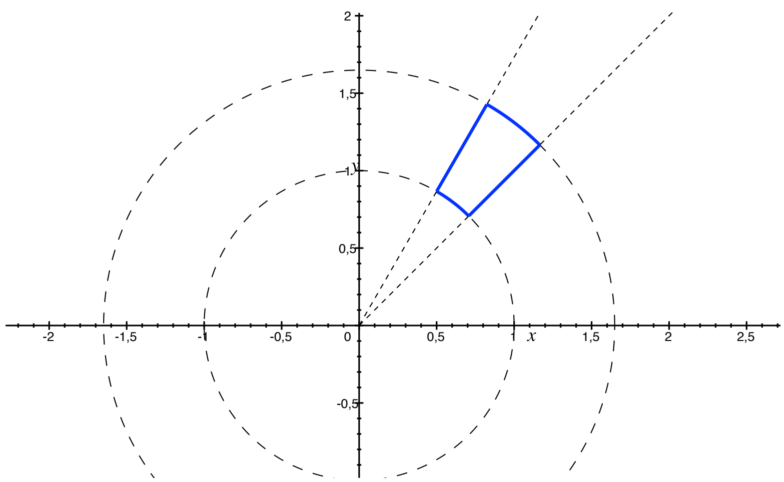

Figure 1. L'insieme E dell'Esercizio 11 è racchiuso dalla curva in blu.

$$x = \varrho \cos \vartheta, \qquad y = \varrho \sin \vartheta,$$

si ottiene

$$\begin{aligned}\iint_E \frac{y}{x} \log(x^2 + y^2)\, dx\, dy &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} \log \varrho^2\, \varrho\, d\varrho\, d\vartheta \\ &= \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta}\, d\vartheta\right) \left(\int_1^{\sqrt{e}} \log \varrho^2\, \varrho\, d\varrho\right)\end{aligned}$$

Calcoliamo separatemente i due integrali: si ha

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta}\, d\vartheta = -\Big[\log \cos \vartheta\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \log \frac{1}{2} - \log \frac{1}{\sqrt{2}} = -\log 2 + \frac{1}{2} \log 2 = \frac{3}{2} \log 2,$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato le proprietà dei logaritmi. Per calcolare il secondo integrale, basterà integrare per parti: si ha

$$\begin{aligned}\int_1^{\sqrt{e}} \varrho \log \varrho^2\, d\varrho = \int_1^{\sqrt{e}} 2\, \varrho \log \varrho\, d\varrho &= \Big[\varrho^2 \log \varrho\Big]_1^{\sqrt{e}} - \int_1^{\sqrt{e}} \varrho^2 \frac{1}{\varrho}\, d\varrho \\ &= e \log \sqrt{e} - \left[\frac{\varrho^2}{2}\right]_1^{\sqrt{e}} \\ &= \frac{e}{2} - \frac{e}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Questo conclude l'esercizio. $\square$

Esercizio 12 (7 punti)**.** *Si calcoli il flusso uscente dalla superficie chiusa*

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1 \ e \ z^2 = 1\},$$

del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \Big(2\,x + 10\,y, 4\,y + 10\,x, -6\,z + z^2 \ \text{arctan}\,\sqrt{x^2 + y^2}\Big).$$

Soluzione. Indichiamo con Ω la porzione di $\mathbb{R}^3$ racchius dalla superficie S, ovvero

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, |z| \leq 1,\ x^2 + y^2 \leq 1\},$$

ovvero Ω è un cilindro con asse coincidente con l'asse delle z e con sezione data da un cerchio di raggio 1. Usando il Teorema della divergenza, si ottiene

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \nu_S \, d\sigma = \iiint_\Omega \text{div}\mathbf{F} \, dx\, dy\, dz.$$

Si osservi adesso che

$$\text{div}\mathbf{F}(x, y, z) = 2\,z\ \text{arctan}(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

Usando le coordinate cilindriche, si ottiene quindi

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathbf{F}} = \iiint_\Omega \text{div}\mathbf{F}\, dx\, dy\, dz &= \int_{-1}^{1}\int_0^{2\pi}\int_0^1 2\,z\ \text{arctan}\,\varrho\,\varrho\, d\varrho\, d\vartheta\, dz \\ &= 2\,\pi\left(\int_{-1}^1 2\,z\, dz\right)\left(\int_0^1 \text{arctan}\,\varrho\,\varrho\, d\varrho\right) = 0,\end{aligned}$$

concludendo quindi l'esercizio. $\square$