Nome, Cognome ....

Matricola ....

ANALISI MATEMATICA A & B
– PROVA SCRITTA –

`Libri, appunti e calcolatrici` **non ammessi**

PRIMA PARTE

- Lo studente scriva solo la risposta, direttamente su questo foglio.

- La seconda parte verrà corretta **esclusivamente** *nel caso in cui lo studente risponda correttamente ad almeno 5 domande su 10 della prima parte.*

- Ogni esercizio vale 2 punti, in caso di risposta corretta.

Esercizio 1. *Si calcoli il limite seguente*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x+x^2)-x+2\,\cos x-2}{2\,\log(1+x)-2\,x+x^2}=-\frac{1}{4}$$

Esercizio 2. *Si calcoli la derivata direzionale della funzione* $f(x,y)=\arcsin(x\,y)$ *nel punto* $(1/2,1/2)$ *lungo la direzione* $\omega=(1/2,\sqrt{3}/2)$

$$\frac{\partial f}{\partial\omega}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{15}}$$

Esercizio 3. *Si calcoli il momento d'inerzia* $\mathcal{M}$ *dell'insieme* $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,0\le x\,y\le 1,\,1\le x\le 2\}$ *rispetto all'asse delle* y

$$\mathcal{M}=\frac{3}{2}$$

Esercizio 4. *Si trovi la primitiva* F *della funzione* $f(x)=e^x\,\sin(2\,x)$ *tale che* $F(0)=0$

$$F(x)=e^x\,\frac{\sin(2\,x)-2\,cos(2\,x)}{5}+\frac{2}{5}$$

Esercizio 5. *Si calcoli il lavoro del campo* $\mathbf{F}(x,y)=(y,-x)$ *lungo il circuito* $\gamma(t)=(1+\cos t,2\,\sin t)$ *con* $t\in[0,2\,\pi]$

$$L=-4\,\pi$$

Esercizio 6. *Si trovi un potenziale* U *del campo vettoriale* $\mathbf{F}(x,y,z)=(y\,e^{x\,y},x\,e^{x\,y}+z^2,2\,y\,z)$

$$U(x,y,z)=e^{x\,y}+y\,z^2$$

Esercizio 7. *Si dica quali tra le seguenti serie numeriche risultano convergenti*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(\frac{n+2}{n}\right)\qquad\sum_{n=1}^{\infty}\tan\left(\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{n}\right)\qquad\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n}}-\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]\qquad\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{n^{100}\,e^n}\ \textit{seconda e terza}$$

Esercizio 8. *Si dia lo sviluppo di Taylor centrato in* $x_0=0$ *all'ordine* 3 *con resto di Peano della funzione seguente*

$$\frac{1}{1-x+x^2}=1+x-x^3+o(x^3)\ \textit{per}\ x\to 0$$

Esercizio 9. *Si calcoli l'area del grafico della funzione* $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ *definita sull'insieme* $A=\{(x,y)\,:\,x^2+y^2\le 1/4\}$

$$\text{Area}=\pi\,(2-\sqrt{3})$$

Esercizio 10. *Si trovino i punti critici della funzione* $f(x,y)=x^2+y^2-x\,y-\dfrac{x^3}{3}$ *e li si classifichino*

$$(0,0)\ \textit{minimo locale}\qquad\left(\frac{3}{2},\frac{3}{4}\right)\ \textit{punto sella}$$

Seconda parte

Lo studente scriva lo svolgimento di ogni esercizio su un foglio a parte.

In questa parte **non** *verranno ritenute valide risposte corrette, ma prive di giustificazione.*

Esercizio 11 (7 punti)**.** *Sia* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *la funzione definita da*

$$f(x, y) = x^3 - y^3,$$

e sia

$$E = \Big\{(x, y) \,:\, 1 \le x^2 + y^2 \le 4\Big\}.$$

Si trovino il massimo ed il minimo di f *su* E*.*

Soluzione. Osserviamo innanzitutto che la funzione f è definita su tutto $\mathbb{R}^2$ ed è continua. Inoltre, la funzione $g(x, y) = x^2 + y^2$ è anch'essa continua su $\mathbb{R}^2$, quindi i due sottoinsiemi

$$\Big\{(x, y) \,:\, g(x, y) \le 4\Big\} \qquad \text{e} \qquad \Big\{(x, y) \,:\, 1 \le g(x, y)\Big\},$$

risultano chiusi. Di conseguenza, l'insieme E è anch'esso chiuso, in quanto intersezione di due insiemi chiusi. Infine, si vede facilmente che E è anche limitato. Abbiamo quindi tutti gli elementi per poter applicare il *Teorema di Weierstrass* e concluderne che esistono il massimo ed il minimo di f su E.

Per trovarli, dividiamo il problema in due:

- cercheremo prima eventuali punti di massimo/minimo sull'interno di E, ovvero su
$$\Big\{(x, y) \,:\, 1 < x^2 + y^2 < 4\Big\};$$
- poi, cercheremo eventuali punti di massimo/minimo sulla frontiera di E, che è composta di due pezzi
$$\Big\{(x, y) \,:\, 1 = x^2 + y^2\Big\} \qquad \text{e} \qquad \Big\{(x, y) \,:\, x^2 + y^2 = 4\Big\}.$$

Per il primo punto, sappiamo dal *Teorema di Fermat* che eventuali punti di massimo/minimo sono da cercarsi tra i punti critici di f. Si ha

$$\nabla f(x, y) = (0, 0,) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = y = 0.$$

L'unico punto critico di f è quindi $(0, 0)$, il quale però non appartiene ad E, quindi lo possiamo trascurare.

Per quanto riguarda il secondo punto, vorremmo usare il *Teorema dei moltiplicatori di Lagrange*. È facile vedere che entrambi i vincoli sono regolari (ovvero soddisfano le ipotesi del *Teorema di Dini*) e che f è C^1, quindi i punti che ci interessano sono da cercare tra le soluzioni dei due sistemi seguenti

$$\left\{\begin{array}{rcl} \nabla f(x,y) & = & \lambda\,\nabla g(x,y) \\ g(x,y) & = & 1 \end{array}\right. \qquad \text{e} \qquad \left\{\begin{array}{rcl} \nabla f(x,y) & = & \lambda\,\nabla g(x,y) \\ g(x,y) & = & 4, \end{array}\right.$$

ovvero

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3\,x^2 & = & 2\,\lambda\,x \\ -3\,y^2 & = & 2\,\lambda\,y \\ x^2+y^2 & = & 1 \end{array}\right. \qquad \text{e} \qquad \left\{\begin{array}{rcl} 3\,x^2 & = & 2\,\lambda\,x \\ -3\,y^2 & = & 2\,\lambda\,y \\ x^2+y^2 & = & 4. \end{array}\right.$$

Partiamo risolvendo il primo: si ha

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{rcl} 3\,x^2 & = & 2\,\lambda\,x \\ -3\,y^2 & = & 2\,\lambda\,y \\ x^2+y^2 & = & 1 \end{array}\right. \quad & \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} x\,(3\,x-2\,\lambda) & = & 0 \\ -3\,y^2 & = & 2\,\lambda\,y \\ x^2+y^2 & = & 1 \end{array}\right. \\
& \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ -3\,y^2 & = & 2\,\lambda\,y \\ y^2 & = & 1 \end{array}\right. \cup \left\{\begin{array}{rcl} 3\,x & = & 2\,\lambda \\ -3\,y^2 & = & 2\,\lambda\,y \\ x^2+y^2 & = & 1 \end{array}\right. \\
& \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ -3\,y^2 & = & 2\,\lambda\,y \\ y^2 & = & 1 \end{array}\right. \cup \left\{\begin{array}{rcl} 3\,x & = & 2\,\lambda \\ y & = & 0 \\ x^2 & = & 1 \end{array}\right. \cup \left\{\begin{array}{rcl} 3\,x & = & 2\,\lambda \\ y\,(3\,y+2\,\lambda) & = & 0 \\ x^2+y^2 & = & 1 \end{array}\right. \\
& \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ -3\,y^2 & = & 2\,\lambda\,y \\ y^2 & = & 1 \end{array}\right. \cup \left\{\begin{array}{rcl} 3\,x & = & 2\,\lambda \\ y & = & 0 \\ x^2 & = & 1 \end{array}\right. \cup \left\{\begin{array}{rcl} 3\,x & = & 2\,\lambda \\ 3\,y & = & -2\,\lambda \\ x^2+y^2 & = & 1 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Osserviamo che le soluzioni (x, y) possono essere determinate senza trovare esplicitamente il valore del moltiplicatore λ: infatti, dai primi due sistemi otteniamo le due coppie di punti

$$P_{1,2} = (0, \pm 1) \qquad \text{e} \qquad P_{3,4} = (\pm 1, 0).$$

Per il terzo sistema, basta osservare che dalle prime due equazioni abbiamo $x = -y$: usando questa informazione nell'equazione di vincolo, si ottiene

$$2\,x^2 = 1 \qquad \text{ovvero} \qquad x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}},$$

da cui quindi troviamo i punti

$$P_{5,6} = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Procedendo in modo esattamente uguale, dal secondo sistema si ottengono le altre tre coppie di punti

$$P_{7,8} = (0, \pm 2), \qquad P_{9,10} = (\pm 2, 0), \qquad P_{11,12} = (\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2}).$$

Adesso non resta che valutare f su questi punti: non è difficile vedere che risulta

$$\max_E f = f(2,0) = f(0,-2) = 8 \qquad \text{e} \qquad \min_E f = f(-2,0) = f(0,2) = -8..$$

Questo conclude l'esercizio. □

Esercizio 12 (7 punti)**.** *Si consideri il potenziale*

$$U(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \text{per } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Si calcoli il flusso del campo vettoriale generato da U attraverso la frontiera dell'insieme

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \le 1, y \ge \frac{1}{2}\right\}.$$

Si calcoli inoltre il lavoro di tale campo lungo la curva $\gamma(t) = (t, 1/2)$, con $t \in [0,1]$.

Soluzione. Intanto osserviamo che il campo in questione è conservativo, dal momento che

$$\mathbf{F}(x,y) = \nabla U(x,y).$$

Per calcolare il lavoro allora, basta calcolarsi la differenza di potenziale nei due punti $\gamma(1)$ e $\gamma(0)$: si ha allora

$$\int_{\mathrm{Im}(\gamma)} \langle \mathbf{F}, \mathbf{T}_\gamma\rangle\, d\ell = U(\gamma(1)) - U(\gamma(0)) = \log\sqrt{\frac{5}{4}} + \sqrt{\frac{4}{5}} - \log\sqrt{\frac{1}{4}} - 2.$$

Per calcolare il flusso richiesto, calcoliamo innanzitutto il campo $\mathbf{F}$: osserviamo intanto che per le proprietà dei logaritmi, possiamo riscrivere U come

$$U(x,y) = \frac{1}{2}\,\log(x^2+y^2) + (x^2+y^2)^{-1/2}, \qquad \text{per } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Abbiamo allora

$$\mathbf{F}(x,y) = \nabla U(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2} - x\,(x^2+y^2)^{-3/2}, \frac{y}{x^2+y^2} - y\,(x^2+y^2)^{-3/2}\right).$$

Per calcolare il flusso attraverso $\partial\Omega$, possiamo usare il *Teorema della divergenza* nel piano (si noti che l'insieme Ω non contiene l'origine $(0,0)$, in cui $\mathbf{F}$ non sarebbe nemmeno definito). Abbiamo allora

$$\int_{\partial\Omega} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N}_{\partial\Omega}\rangle\, d\ell = \iint_\Omega \operatorname{div}\mathbf{F}\, dx\, dy,$$

dove $\mathbf{N}_{\partial\Omega}$ è la normale uscente. Ci serve calcolare la divergenza di $\mathbf{F}$: si ha

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_1}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{\partial}{\partial x}\Big(x\,(x^2+y^2)^{-3/2}\Big)\\ &= \frac{x^2+y^2-2\,x^2}{(x^2+y^2)^2} - (x^2+y^2)^{-3/2} + 3\,x^2\,(x^2+y^2)^{-5/2}.\end{aligned}$$

In modo simile, si ha

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_2}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{\partial}{\partial y}\Big(x\,(x^2+y^2)^{-3/2}\Big)\\ &= \frac{x^2+y^2-2\,y^2}{(x^2+y^2)^2} - (x^2+y^2)^{-3/2} + 3\,y^2\,(x^2+y^2)^{-5/2}.\end{aligned}$$

Sommando queste due quantità, si ottiene

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\mathbf{F} &= \cancel{\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}} - (x^2+y^2)^{-3/2} + 3\,x^2\,(x^2+y^2)^{-5/2}\\ &\quad + \cancel{\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}} - (x^2+y^2)^{-3/2} + 3\,y^2\,(x^2+y^2)^{-5/2}\\ &= -2\,(x^2+y^2)^{-3/2} + 3\,(x^2+y^2)\,(x^2+y^2)^{-5/2}\\ &= -2\,(x^2+y^2)^{-3/2} + 3\,(x^2+y^2)^{-3/2},\end{aligned}$$

ovvero

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Dobbiamo quindi calcolare

$$\int_{\partial\Omega} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N}_{\partial\Omega} \rangle \, d\ell = \iint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx\, dy = \iint_{\Omega} \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \, dx\, dy.$$

L'ultimo integrale si può calcolare utilizzando le coordinate polari

$$x = \varrho \cos\vartheta, \qquad y = \varrho \sin\vartheta,$$

ed osservando che il nuovo insieme di integrazione diventa

$$\mathcal{O} = \left\{ (\varrho, \vartheta) \,:\, \vartheta \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\,\pi\right],\ \frac{1}{2\,\sin\vartheta} \le \varrho \le 1 \right\}.$$

Si osservi che si tratta di un insieme ϱ−semplice. Abbiamo dunque

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \, dx\, dy &= \iint_{\mathcal{O}} \frac{1}{\varrho^3}\, \varrho \, d\varrho\, d\vartheta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\,\pi} \left(\int_{\frac{1}{2\,\sin\vartheta}}^{1} \frac{1}{\varrho^2}\, d\varrho \right) d\vartheta \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\,\pi} \left[-\frac{1}{\varrho} \right]_{\frac{1}{2\,\sin\vartheta}}^{1} d\vartheta \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\,\pi} (2\,\sin\vartheta - 1)\, d\vartheta \\ &= \Big[-2\,\cos\vartheta \Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\,\pi} - \frac{2}{3}\,\pi = 2\sqrt{3} - \frac{2}{3}\,\pi. \end{aligned}$$

Questo conclude l'esercizio. □