Nome, Cognome ....

Matricola ....

ANALISI MATEMATICA A & B
– PROVA SCRITTA –
7 SETTEMBRE 2022

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA – A.A. 2021/2022

`Libri, appunti e calcolatrici` **non ammessi**

- Lo studente scriva solo la risposta, direttamente su un foglio bianco.
- Ogni esercizio vale 2 punti, in caso di risposta corretta

Esercizio 1. *Si dica quali tra le serie seguenti risultano convergenti*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\sqrt[n]{n!}} \quad \textit{seconda e quarta}$$

Esercizio 2. *Si calcoli il seguente limite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\,\cos(x^2-x^3)+e^{x^4}-3}{x\,(\sqrt{1+x^4}-1)} = 4$$

Esercizio 3. *Si trovi una primitiva F della funzione $f(x) = e^{2\,x}\,\sin x$*

$$F(x) = \frac{2\,e^{2\,x}\,\sin x - e^{2\,x}\,\cos x}{5}$$

Esercizio 4. *Si calcoli il lavoro del campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y,z) = (e^{x+y}\,\cos z, e^{x+y}\,\cos z, -e^{x+y}\,\sin z)$ lungo il sostegno della curva $\gamma(t) = (\cos t, -\sin t, t^2)$ con $t \in [0, 2\,\pi]$*

$$L = e\,\cos(4\,\pi^2) - e$$

Esercizio 5. *Data la funzione $f(x,y) = y\,e^{x-y}$, si scriva l'equazione del piano tangente al suo grafico nel punto $(1,1,f(1,1))$*

$$z = x$$

Esercizio 6. *Si calcoli la derivata di $f(x,y) = \arcsin(x^2-y)$ nel punto $(1,1)$ lungo la direzione $\omega = (\sqrt{3}/2, 1/2)$*

$$\frac{\partial f}{\partial \omega}(0,0) = \sqrt{3} - \frac{1}{2}$$

Esercizio 7. *Si dia lo sviluppo di Taylor all'ordine 4 centrato in $x = 0$ con resto di Peano della funzione*

$$\cos(x-x^2) = 1 - \frac{x^2}{2} + x^3 - \frac{11}{24}\,x^4 + o(x^4)$$

Esercizio 8. *Si calcoli il momento d'inerzia di $\Sigma = \{(x,y) \,:\, x \in [0,\pi/2],\, 0 \le y \le \cos x\}$ rispetto all'asse x*

$$M = \frac{2}{9}$$

Esercizio 9. *Sia $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^4 + 2\,y^4 \le 1\}$, si calcolino*

$$\min_{(x,y)\in E}(x^2+y^2) = 0 \qquad\qquad \max_{(x,y)\in E}(x^2+y^2) = \sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{1}{6}}$$

Esercizio 10. *Si trovino e si classifichino i punti critici della funzione $f(x,y) = x^2\,y - x\,y + y^2$*

$(0,0)$, $(1,0)$ *punti sella,* $\qquad (1/2, 1/8)$ *minimo locale*

Seconda parte

Lo studente scriva lo svolgimento di ogni esercizio su un foglio a parte.

In questa parte **non** *verranno ritenute valide risposte corrette, ma prive di giustificazione.*

Esercizio 11 (9 punti)**.** *Si consideri la superficie* $\phi : [0, \pi] \times [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$ *definita da*

$$\phi(t, s) = ((2 + \cos s) \cos t, (2 + \cos s) \sin t, \sin s).$$

(1) *Si dimostri che* ϕ *è una superficie regolare;*

(2) *si calcoli l'area del sostegno di* ϕ*;*

(3) *si calcoli il momento d'inerzia del sostegno di* ϕ*, rispetto all'asse* z*;*

(4) *si calcoli il flusso del campo vettoriale costante* $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ *attraverso il sostegno di* ϕ*.*

Esercizio 12 (7 punti)**.** *Fissato* $R > 0$*, si consideri il potenziale*

$$U(x, y, z) = \frac{R^2 - x^2}{2} + \frac{R^2 - y^2}{2} + \frac{R^2 - z^2}{2},$$

definito su $\mathbb{R}^3$*. Si calcoli il flusso del campo vettoriale generato da* U *attraverso la frontiera dell'insieme*

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 0 \leq U(x, y, z) \leq 1\},$$

in funzione di R*.*