Nome, Cognome ....

Matricola ....

ANALISI MATEMATICA
– PROVA SCRITTA –

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA – A.A. 2018/2019

Libri, appunti e calcolatrici non ammessi

PRIMA PARTE

- Lo studente scriva solo la risposta, direttamente su questo foglio.

- La seconda parte verrà corretta **esclusivamente** *nel caso che lo studente risponda correttamente ad almeno 5 domande su 10 della prima parte.*

- Ogni esercizio vale 2 punti, in caso di risposta corretta.

Esercizio 1. *Si determini per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite seguente è corretto*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,y}{(x^2+y^2)^\alpha} = 0 \qquad \alpha < 1$$

Esercizio 2. *Si trovino i punti sella per la funzione $f(x,y) = x^3 - 3\,x\,y^2 + 3\,x\,y$*

$$(0,0), \quad (0,1)$$

Esercizio 3. *Si trovi una primitiva F della funzione $f(x) = \tan x$*

$$F(x) = -\log|\cos x|$$

Esercizio 4. *Si trovi la lunghezza della curva $\gamma(t) = (\sqrt{1-t^2}, t)$ con $t \in [0, 1/2]$*

$$\ell(\gamma) = \frac{\pi}{6}$$

Esercizio 5. *Trovare una superficie regolare ϕ il cui sostegno coincida con l'insieme $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2 = 1,\ 1/2 \le z \le \sqrt{3}/2, y \ge 0\}$*

$$\phi(t,s) = (\cos t\ \sin s, \sin t\ \sin s, \cos s) \qquad \textit{con } (t,s) \in [0,\pi] \times \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$$

Esercizio 6. *Sia $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + x\,y + y^2 = 1\}$, si determinino*

$$\max_{(x,y)\in E}(x^2+y^2) = 2 \qquad\qquad \min_{(x,y)\in E}(x^2+y^2) = \frac{2}{3}$$

Esercizio 7. *Si dica per quali $\alpha \ge 0$ la seguente serie numerica risulta convergente*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\,\alpha)^n}{\sqrt[n]{n!}} \qquad \alpha < \frac{1}{2}$$

Esercizio 8. *Si calcoli il lavoro del* campo di Biot-Savart

$$\mathbf{F}_{BS}(x,y,z) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right),$$

lungo il cammino $\gamma(t) = (1+t, 1, 0)$, con $t \in [0,1]$

$$\int_{\mathrm{Im}(\gamma)} \langle \mathbf{F}_{BS}, \mathbf{T}_\gamma \rangle\, d\ell = \frac{\pi}{4} - \arctan(2)$$

Esercizio 9. *Si dia lo sviluppo di Taylor all'ordine 3 centrato in $x_0 = 0$ con resto di Peano della funzione*

$$f(x) = \frac{1}{1+x-x^3} = 1 - x + x^2 + o(x^3)$$

Esercizio 10. *Si scriva l'equazione del piano tangente al grafico di $f(x,y) = \arccos(x\,y)$ nel punto $(0,1,\pi/2)$*

$$z = \frac{\pi}{2} - x$$

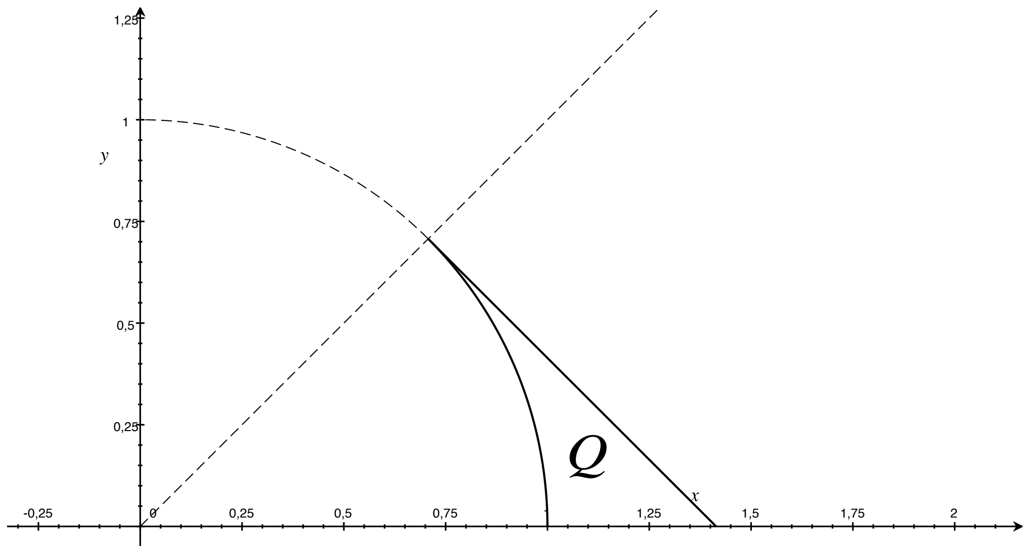

FIGURE 1. L'insieme di integrazione Q dell'esercizio 11

SECONDA PARTE

Lo studente scriva lo svolgimento di ogni esercizio su un foglio a parte.

In questa parte **non** *verranno ritenute valide risposte corrette, ma prive di giustificazione.*

Esercizio 11 (7 punti)**.** *Consideriamo l'insieme*

$$Q = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \geq 1,\, x + y \leq \sqrt{2},\, 0 \leq y \leq x\Big\}.$$

Si calcoli l'integrale doppio

$$\iint_Q \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\, dx\, dy.$$

Soluzione. Usiamo le coordinate polari

$$x = \varrho \cos\vartheta, \qquad y = \varrho \sin\vartheta.$$

Dobbiamo trovare l'insieme in cui variano le nuove variabili ϱ e ϑ, ovvero dobbiamo descrivere l'insieme Q con queste nuove variabili. Si vede facilmente che

$$\vartheta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right],$$

ed inoltre deve risultare

$$1 \leq \varrho \leq R(\vartheta),$$

dove $R(\vartheta)$ è un opportuno raggio dipendente da ϑ, che andiamo adesso a determinare. Determiniamo intanto l'ascissa del punto di intersezione tra le due rette

$$x + y = \sqrt{2} \qquad \text{e} \qquad y = (\tan\vartheta)\, x.$$

Si ottiene

$$\sqrt{2} - x = \tan\vartheta\, x \qquad \text{ovvero} \qquad x = \frac{\sqrt{2}}{1+\tan\vartheta} = \frac{\sqrt{2}\cos\vartheta}{\cos\vartheta + \sin\vartheta}.$$

Adesso, usando il triangolo rettangolo con vertici $(0,0)$, (x,y) e $(x,0)$, si ottiene

$$R(\vartheta) = \frac{x}{\cos\vartheta} = \frac{\sqrt{2}}{\cos\vartheta + \sin\vartheta}.$$

Il nostro integrale diventa quindi

$$\begin{aligned}
\iint_Q \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\, dx\, dy &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{\cos\vartheta+\sin\vartheta}} \frac{1}{\varrho^4}\, \varrho\, d\varrho\, d\vartheta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[-\frac{1}{2\,\varrho^2}\right]_1^{\frac{\sqrt{2}}{\cos\vartheta+\sin\vartheta}} d\vartheta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{1}{2} - \frac{(\cos\vartheta + \sin\vartheta)^2}{4}\right] d\vartheta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{\sin(2\,\vartheta)}{4}\right] d\vartheta = \frac{\pi}{16} - \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

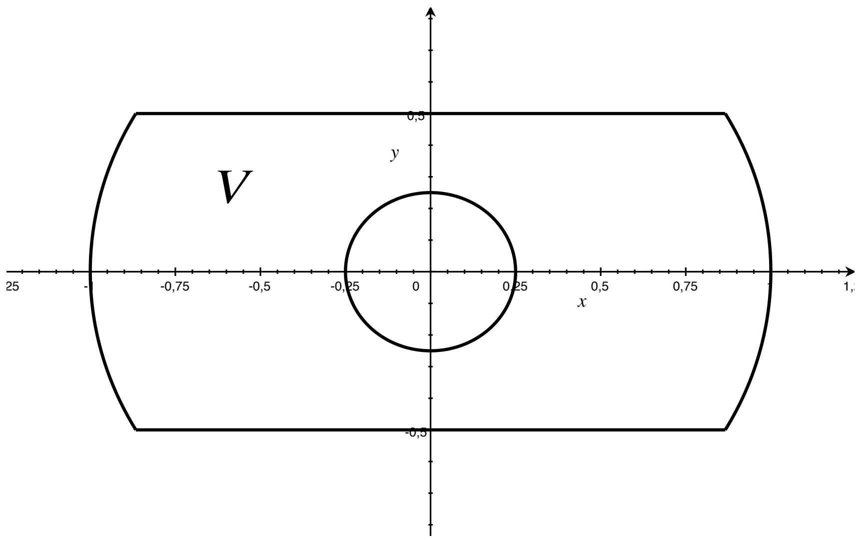

FIGURE 2. L'insieme V dell'Esercizio 12 si ottiene ruotando attorno all'asse z l'insieme in figura. Nel caso $\ell = 0$, il "buco" centrale non è presente.

Questo conclude l'esercizio. $\square$

Esercizio 12 (8 punti)**.** *Sia* $\mathbf{F}_{\mathrm{grav}} : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}^3$ *il campo vettoriale gravitazionale, ovvero*

$$\mathbf{F}_{\mathrm{grav}}(x,y,z) = \left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \right),$$

Dato un numero reale $0 \le \ell < 1/2$*, consideriamo il sottoinsieme* V *dello spazio tridimensionale, definito da*

$$V = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \ell^2 \le x^2+y^2+z^2 \le 1 \right\} \cap \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, |z| \le \frac{1}{2} \right\}.$$

Si calcoli il flusso di $\mathbf{F}_{\mathrm{grav}}$ *attraverso* ∂V*, in funzione del parametro* ℓ*.*

Soluzione. Cominciamo dal caso $0 < \ell < 1/2$. In tal caso, l'insieme V non contiene l'origine, quindi $\mathbf{F}_{\mathrm{grav}} \in C^1(\overline{V})$ e possiamo usare il Teorema della Divergenza. Osserviamo che

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{F}_{\mathrm{grav}}(x,y,z) &= \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{2} \cdot \frac{2\,x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} \\ &+ \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{2} \cdot \frac{2\,y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} \\ &+ \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{2} \cdot \frac{2\,z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} \\ &= \frac{3}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{2} \cdot \frac{2\,(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} = 0. \end{aligned}$$

Quindi in tal caso otteniamo

$$\iint_{\partial V} \langle \mathbf{F}_{\mathrm{grav}}, \mathbf{N} \rangle \, d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F}_{\mathrm{grav}} \, dx\, dy\, dz = 0.$$

Nel caso $\ell = 0$ dobbiamo fare attenzione, in quanto adesso la singolarità $(0,0,0)$ appartiene a V e quindi non possiamo più utilizzare il Teorema della Divergenza. Dobbiamo quindi calcolare il flusso, usando la definizione, ovvero dobbiamo calcolare l'integrale di superficie

$$\iint_{\partial V} \langle \mathbf{F}_{\mathrm{grav}}, \mathbf{N} \rangle \, d\sigma.$$

Cominciamo dividendo il bordo ∂V in tre parti:

$$\Gamma_1 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2 = 1, |z| < \frac{1}{2} \right\} \qquad \text{guscio sferico}$$

$$\Gamma_2 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2 \le 1, z = \frac{1}{2} \right\} \qquad \text{parte piatta superiore}$$

$$\Gamma_3=\Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,:\,x^2+y^2+z^2\le 1, z=-\frac{1}{2}\Big\}\qquad \text{parte piatta inferiore.}$$

Abbiamo quindi

$$\iint_{\partial V}\langle \mathbf{F}_{\rm grav},\mathbf{N}\rangle\,d\sigma=\sum_{i=1}^{3}\iint_{\Gamma_i}\langle \mathbf{F}_{\rm grav},\mathbf{N}\rangle\,d\sigma.$$

Il guscio sferico Γ_1 è il sostegno della superficie regolare

$$\phi(\vartheta,\varphi)=(\cos\vartheta\,\sin\varphi,\sin\vartheta,\sin\varphi,\cos\varphi),\qquad \text{con } \vartheta\in[0,2\,\pi],\ \varphi\in[\pi/3,2\pi/3].$$

Inoltre, su Γ_1 si ha (supponendo di prendere la normale *uscente*)

$$\langle \mathbf{F}_{\rm grav},\mathbf{N}\rangle=|\mathbf{F}_{\rm grav}|=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}=1,$$

dal momento che $\mathbf{F}_{\rm grav}$ e $\mathbf{N}$ sono paralleli. Si ha dunque

$$\iint_{\Gamma_1}\langle \mathbf{F}_{\rm grav},\mathbf{N}\rangle\,d\sigma=\iint_{\Gamma_1}d\sigma=\iint_{[0,2\,\pi]\times[\pi/3,2\pi/3]}\left|\frac{\partial\phi}{\partial\vartheta}\times\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\right|\,d\vartheta\,d\varphi=2\,\pi\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\,\pi}{3}}\sin\varphi\,d\varphi=2\,\pi.$$

Per quanto riguarda le parti piatte, è sufficiente osservare che Γ_2 e Γ_3 sono entrambi due dischi di raggio $\sqrt{3}/2$ paralleli al piano $x\,y$, con centro in $(0,0,1/2)$ e $(0,0,-1/2)$, rispettivamente. Inoltre, si ha

$$\langle \mathbf{F}_{\rm grav},\mathbf{N}\rangle=\langle \mathbf{F}_{\rm grav},(0,0,1)\rangle=\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1/2}{(x^2+y^2+\frac{1}{4})^{\frac{3}{2}}},\qquad \text{su }\Gamma_2,$$

e

$$\langle \mathbf{F}_{\rm grav},\mathbf{N}\rangle=\langle \mathbf{F}_{\rm grav},(0,0,-1)\rangle=-\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1/2}{(x^2+y^2+\frac{1}{4})^{\frac{3}{2}}},\qquad \text{su }\Gamma_3.$$

Non è difficile vedere allora che

$$\iint_{\Gamma_2}\langle \mathbf{F}_{\rm grav},\mathbf{N}\rangle\,d\sigma=\iint_{\Gamma_3}\langle \mathbf{F}_{\rm grav},\mathbf{N}\rangle\,d\sigma.$$

Nel caso $\ell=0$ si ottiene quindi

$$\begin{aligned}\iint_{\partial V}\langle \mathbf{F}_{\rm grav},\mathbf{N}\rangle\,d\sigma&=\iint_{\Gamma_1}\langle \mathbf{F}_{\rm grav},\mathbf{N}\rangle\,d\sigma+2\iint_{\Gamma_2}\langle \mathbf{F}_{\rm grav},\mathbf{N}\rangle\,d\sigma\\&=2\,\pi+2\iint_{\Gamma_2}\langle \mathbf{F}_{\rm grav},\mathbf{N}\rangle\,d\sigma.\end{aligned}$$

Ci resta soltanto da calcolare l'ultimo integrale, ovvero

$$\iint_{\Gamma_2}\langle \mathbf{F}_{\rm grav},\mathbf{N}\rangle\,d\sigma=\iint_{\Gamma_2}\frac{1/2}{(x^2+y^2+\frac{1}{4})^{\frac{3}{2}}}\,dx\,dy.$$

Usando le coordinate polari, l'ultimo integrale diventa

$$\begin{aligned}\iint_{\Gamma_2}\frac{1/2}{(x^2+y^2+\frac{1}{4})^{\frac{3}{2}}}\,dx\,dy&=\int_0^{2\,\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1/2}{(\varrho^2+\frac{1}{4})^{\frac{3}{2}}}\,\varrho\,d\varrho\,d\vartheta\\&=\pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(-\left(\varrho^2+\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}\right)\left(-\frac{2\,\varrho}{2}\right)\,d\varrho\\&=\pi\left[-\left(\varrho^2+\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\pi.\end{aligned}$$

In definitiva, abbiamo trovato

$$\iint_{\partial V}\langle \mathbf{F}_{\rm grav},\mathbf{N}\rangle\,d\sigma=4\,\pi.$$

Questo conclude l'esercizio. □