Nome, Cognome ....

Matricola ....

ANALISI MATEMATICA A & B
– PROVA SCRITTA –
4 SETTEMBRE 2023

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA – A.A. 2022/2023

`Libri, appunti e calcolatrici` **non ammessi**

- Lo studente scriva solo la risposta, direttamente su un foglio bianco.
- Ogni esercizio vale 2 punti, in caso di risposta corretta

Esercizio 1. *Si dica quali tra le serie seguenti risultano convergenti*

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!} \qquad \boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right]} \qquad \boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log(n+1)-\log n}{\sqrt[n]{n!}}}$$

Esercizio 2. *Si calcoli il seguente limite*

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x-x^2}-\cos x-\sin x}{x-\sin x}=-4$$

Esercizio 3. *Si trovi una primitiva F della funzione $f(x)=x^2\,\log|x|$*

$$F(x)=\frac{x^3}{3}\,\log|x|-\frac{x^3}{9}$$

Esercizio 4. *Si calcoli il lavoro del campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y)=(-y,x)$ lungo il sostegno della circuito regolare $\gamma(t)=(\cos(t^2),\sin(t^2))$ con $t\in[0,\sqrt{2\,\pi}]$*

$$L=2\,\pi$$

Esercizio 5. *Data la funzione $f(x,y)=y\,\arctan(x+2y)$, si scriva l'equazione del piano tangente al suo grafico nel punto $(1,0,f(1,0))$*

$$z=\frac{\pi}{4}\,y$$

Esercizio 6. *Si calcoli la derivata di $f(x,y)=\arcsin(x^2-y)$ nel punto $(1,1)$ lungo la direzione $\omega=(-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$*

$$\frac{\partial f}{\partial\omega}(1,1)=-\frac{3}{\sqrt{2}}$$

Esercizio 7. *Si dia lo sviluppo di Taylor all'ordine 4 centrato in $x=0$ con resto di Peano della funzione*

$$x\,e^{x-x^2}=x+x^2-\frac{x^3}{2}-\frac{5}{6}\,x^4+o(x^4)$$

Esercizio 8. *Si calcoli il momento d'inerzia di $E=\{(x,y)\,:\,x\in[0,\pi],\,0\le y\le\sin x\}$ rispetto all'asse x*

$$M=\frac{4}{9}$$

Esercizio 9. *Si dica quali tra i seguenti campi vettoriali risultano conservativi sul proprio dominio di definizione*

$$\boxed{\mathbf{F}(x,y)=\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2}\right)} \qquad \mathbf{B}(x,y)=\left(-\frac{y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}\right) \qquad \boxed{\mathbf{H}(x,y,z)=(y\,z,x\,z,x\,y)}$$

Esercizio 10. *Si trovino e si classifichino i punti critici della funzione $f(x,y)=x^2\,y-x\,y+y^2$*

$(0,0)$, $(1,0)$ *punti sella,* $\qquad$ $(1/2,1/8)$ *minimo locale*

Seconda parte

Lo studente scriva lo svolgimento di ogni esercizio su un foglio a parte.

In questa parte **non** *verranno ritenute valide risposte corrette, ma prive di giustificazione.*

Esercizio 11 (9 punti)**.** *Sia $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ il seguente grafico di funzione, dato da*

$$\Sigma = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 \le 1, z = x^2 + y^2\Big\}.$$

- *Si calcoli il momento d'inerzia di Σ, rispetto all'asse z;*
- *si calcoli il flusso del campo vettoriale costante $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ attraverso Σ.*

Soluzione. L'insieme Σ è il **grafico di una funzione di** 2 **variabilii**, quindi possiamo vederlo come il **sostegno di una superficie cartesiana**. Dobbiamo quindi calcolare due **integrali di superficie**, dati da

$$\iint_\Sigma (x^2 + y^2)\, d\sigma(x, y, z) \qquad \text{e} \qquad \iint_\Sigma \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{N}\rangle\, d\sigma(x, y, z).$$

Per quanto visto a lezione (anche se nessuno studente si decide a studiare questa parte), si ha

$$\iint_\Sigma (x^2 + y^2)\, d\sigma(x, y, z) = \iint_A (x^2 + y^2)\, \sqrt{1 + |\nabla f(x, y)|^2}\, dx\, dy,$$

dove

$$A = \Big\{(x, y) \,:\, x^2 + y^2 \le 1\Big\} \qquad \text{e} \qquad f(x, y) = x^2 + y^2.$$

Abbiamo quindi

$$\iint_\Sigma (x^2 + y^2)\, d\sigma(x, y, z) = \iint_A (x^2 + y^2)\, \sqrt{1 + |\nabla f(x, y)|^2}\, dx\, dy = \iint_A (x^2 + y^2)\, \sqrt{1 + 4\,x^2 + 4\,y^2}\, dx\, dy.$$

L'ultimo integrale si può calcolare usando le coordinate polari

$$x = \varrho\,\cos\vartheta, \qquad y = \varrho\,\sin\vartheta,$$

quindi si ha

$$\iint_\Sigma (x^2 + y^2)\, d\sigma(x, y, z) = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \varrho^3\,(1 + 4\,\varrho^2)^{\frac{1}{2}}\, d\varrho\, d\vartheta = 2\,\pi \int_0^1 \varrho^3\,(1 + 4\,\varrho^2)^{\frac{1}{2}}\, d\varrho.$$

Per il calcolo di quest'ultimo integrale, si può usare un'integrazione per parti

$$\begin{aligned}\int_0^1 \varrho^3\,(1 + 4\,\varrho^2)^{\frac{1}{2}}\, d\varrho &= \left[\varrho^2\,\frac{1}{12}\,(1 + 4\,\varrho^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 - \int_0^1 \varrho\,\frac{1}{6}\,(1 + 4\,\varrho^2)^{\frac{3}{2}}\, d\varrho \\ &= \left[\varrho^2\,\frac{1}{12}\,(1 + 4\,\varrho^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 - \left[\frac{1}{120}\,(1 + 4\,\varrho^2)^{\frac{5}{2}}\, d\varrho\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{12}\,(5\,\sqrt{5} - 1) - \frac{1}{120}\,(25\,\sqrt{5} - 1).\end{aligned}$$

Il calcolo del secondo integrale si svolge in modo analogo, ricordando che per una superficie cartesiana si ha

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}\,\left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right),$$

da cui quindi

$$\iint_\Sigma \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{N}\rangle\, d\sigma(x, y, z) = \iint_A \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}\,\sqrt{1 + |\nabla f|^2}\, dx\, dy = \iint_A dx\, dy = \pi.$$

Questo conclude l'esercizio. □

Esercizio 12 (7 punti)**.** *Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da*

$$f(x, y) = x + 2\,y.$$

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^2$ l'insieme definito da

$$E = B \setminus (D_+ \cup D_-),$$

dove:

$$B = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \le 16\Big\},$$

e

$$D_+ = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x + 2)^2 + y^2 < 1\Big\}, \qquad D_- = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x - 2)^2 + y^2 < 1\Big\}.$$

Si dica se f ammette massimo e minimo su E. In caso affermativo, li si determinino.

Soluzione. L'insieme E in questione è il disco *chiuso* di centro $(0,0)$ e raggio 4, privato di due cerchi *aperti* aventi raggio 1 centrati rispettivamente in $(-2,0)$ e $(2,0)$. Si tratta quindi di un insieme chiuso e limitato. Inoltre la funzione f è continua su tutto $\mathbb{R}^2$. Per il *Teorema di Weierstrass*, la funzione f ammette massimo e minimo su E.

Eventuali punti di massimo e minimo interni ad E sono da cercare tra i punti critici di f. Tuttavia, si vede facilmente che

$$\nabla f(x,y) = (1,2) \neq (0,0),$$

cioè f è priva di punti critici. I punti di massimo e minimo di f staranno quindi necessariamente sulla frontiera ∂E. Si noti che tale frontiera è formata da 3 pezzi, corrispondenti alle 3 circonferenze. Per determinare i punti che cerchiamo, possiamo usare il *Teorema dei moltiplicatori di Lagrange*. Dal momento che la frontiera è fatta da 3 pezzi, si dovranno risolvere separatamente 3 sistemi, confrontando poi i valori di f nei punti trovati.

I 3 sistemi in questione sono i seguenti

$$\left\{\begin{array}{ccc} 1 & = & 2\,\lambda\,x \\ 2 & = & 2\,\lambda\,y \\ x^2+y^2 & = & 16 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ccc} 1 & = & 2\,\lambda\,(x+2) \\ 2 & = & 2\,\lambda\,y \\ (x+2)^2+y^2 & = & 1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ccc} 1 & = & 2\,\lambda\,(x-2) \\ 2 & = & 2\,\lambda\,y \\ (x-2)^2+y^2 & = & 1 \end{array}\right.$$

In tutti e 3 i sistemi si può determinare (x,y) senza passare dal moltiplicatore λ, è sufficiente utilizzare le prime due equazioni per trovare la relazione che lega y ed x. Esse sono rispettivamente

$$y = 2\,x \qquad y = 2\,(x+2) \qquad y = 2\,(x-2).$$

Sostituendo nella terza equazione, si trovano i punti candidati massimo e minimo. $\square$