Nome, Cognome ....

Matricola ....

ANALISI MATEMATICA
– PROVA SCRITTA –

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA – A.A. 2019/2020

Libri, appunti e calcolatrici non ammessi

PRIMA PARTE

- Lo studente scriva solo la risposta, direttamente su questo foglio.
- La seconda parte verrà corretta **esclusivamente** *nel caso che lo studente risponda correttamente ad almeno 5 domande su 10 della prima parte.*
- Ogni esercizio vale 2 punti, in caso di risposta corretta.

Esercizio 1. *Si calcoli il seguente limite*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}\,\arcsin\left(\frac{n+1}{n^2+1}\right) = \frac{1}{e}$$

Esercizio 2. *Si scriva l'equazione del piano tangente al grafico della funzione* $f(x,y) = \arctan(x^2+y)$ *nel punto* $(0,1,\pi/4)$.

$$z = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(y-1)$$

Esercizio 3. *Si trovi una primitiva* F *della funzione* $f(x) = \sqrt{2\,x+1}$.

$$F(x) = \frac{1}{3}(2\,x+1)^{\frac{3}{2}}$$

Esercizio 4. *Si calcoli la divergenza del gradiente della funzione* $U(x,y) = \arctan(x/y)$

$$\mathrm{div}\nabla U(x,y) = 0$$

Esercizio 5. *Si calcoli la lunghezza* ℓ *dell'arco di cicloide* $\gamma(t) = (t-\sin t, 1-\cos t)$ *con* $t\in[\pi, 2\,\pi]$

$$\ell = 4$$

Esercizio 6. *Si dica per quali* α *la serie seguente risulta convergente*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^\alpha}{n^2+n+7} \qquad \alpha < 1$$

Esercizio 7. *Si calcoli il lavoro del campo vettoriale* $\mathbf{F}(x,y) = (-e^x\cos y, e^x\sin y)$ *lungo un qualsiasi cammino regolare che va da* $(0,0)$ *a* $(1,1)$

$$L = -e\cos(1) + 1$$

Esercizio 8. *Si calcoli il limite seguente*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\sin x) - x}{1-\cos x} = -1$$

Esercizio 9. *Si dia la sviluppo di Taylor all'ordine* 3 *centrato in* $x=0$ *con resto di Peano della funzione*

$$\sin(x-x^3) = x - \frac{7}{6}x^3 + o(x^3)$$

Esercizio 10. *Si calcoli il flusso del campo vettoriale* $\mathbf{F}(x,y,z) = (e^z\cos y, e^x z + 2\,y, z)$ *attraverso una sfera di raggio* 1 *e centro* $(0,0,1)$

$$\Phi_{\mathbf{F}} = 4\,\pi$$

Seconda parte

Lo studente scriva lo svolgimento di ogni esercizio su un foglio a parte.

In questa parte **non** *verranno ritenute valide risposte corrette, ma prive di giustificazione.*

Esercizio 11 (7 punti)**.** *Si calcoli il momento di inerzia dell'insieme*

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z = \sqrt{x^2 + y^2},\ 1 \le z \le 2\}$$

rispetto all'asse delle z.

Soluzione. Dobbiamo calcolare l'integrale di superficie

$$\iint_\Sigma (x^2 + y^2)\, d\sigma(x, y, z).$$

Osserviamo che Σ è il sostegno della superficie cartesiana

$$\Phi(t, s) = (t, s, f(t, s)), \qquad \text{per } (t, s) \in B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \le \sqrt{x^2 + y^2} \le 2\},$$

con

$$f(t, s) = \sqrt{t^2 + s^2}.$$

Ricordando la formula per gli integrali di superficie nel caso di superfici cartesiane, si ha allora

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma (x^2 + y^2)\, d\sigma(x, y, z) &= \iint_B (t^s + s^2)\, \sqrt{1 + |\nabla f(t, s)|^2}\, dt\, ds \\ &= \sqrt{2} \iint_B (t^s + s^2)\, dt\, ds.\end{aligned}$$

Per calcolare l'ultimo integrale, possiamo utilizzare le coordinate polari

$$t = \varrho \cos\vartheta, \qquad s = \varrho \sin\vartheta, \qquad (\varrho, \vartheta) \in [1, 2] \times [0, 2\pi].$$

Si ottiene allora

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma (x^2 + y^2)\, d\sigma(x, y, z) &= \iint_B (t^s + s^2)\, \sqrt{1 + |\nabla f(t, s)|^2}\, dt\, ds \\ &= \sqrt{2} \iint_B (t^s + s^2)\, dt\, ds = \sqrt{2}\, 2\pi \int_1^2 \varrho^3\, d\varrho \\ &= 2\sqrt{2}\,\pi\, \frac{15}{4} = \frac{15\sqrt{2}}{2}\,\pi.\end{aligned}$$

Questo conclude l'esercizio. $\square$

Esercizio 12 (7 punti)**.** *Si consideri la funzione di due variabili*

$$f(x, y) = x^3 - 3\,x\,y^2$$

sull'insieme

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \le 1\}.$$

Si trovino i punti critici di f in E, classificandoli. Si determinino inoltre

$$\min_E f \qquad e \qquad \max_E f.$$

Proof. Troviamo innanzitutto i punti critici. Si ha

$$\nabla f(x, y) = (3\,x^2 - 3\,y^2, -6\,x\,y),$$

da cui si vede facilmente che $(0, 0)$ è l'unico punto critico. Si tratta di un punto critico degenere, dal momento che la matrice hessiana

$$Hf(x, y) = \begin{bmatrix} 6\,x & -6\,y \\ -6\,y & -6\,x \end{bmatrix},$$

è tale che

$$Hf(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

D'altra parte, se si considera la restrizione di f alla retta $y = 0$, si ha

$$g(x) = f(x, 0) = x^3,$$

che è una funzione strettamente monotona. Questo dimostra che $(0, 0)$ non può essere ne' punto di massimo ne' punto di minimo. Si tratta quindi di un punto sella.

Osserviamo adesso che E è un insieme chiuso e limitato ed f è continua su E, dal *Teorema di Weierstrass* abbiamo allora che

$$\min_E f \qquad \text{e} \qquad \max_E f,$$

esistono. Inoltre, dalla discussione iniziale e dal *Teorema di Fermat*, i corrispondenti punti di massimo e di minimo non possono trovarsi all'interno di E, ovvero in

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2<1\}.$$

Dovranno quindi stare su

$$\partial E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2=1\}.$$

Si ha quindi

$$\min_E f = \min_{\partial E} f \qquad \text{e} \qquad \max_E f = \max_{\partial E} f.$$

Al fine di determinali, usiamo il *Teorema dei Moltiplicatori di Lagrange*. I punti che stiamo cercando, sono quindi tra le soluzioni (x,y) del sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) &= \lambda \nabla G(x,y) \\ G(x,y) &= 0 \end{cases}$$

dove $G(x,y) = x^2+y^2-1$. Abbiamo allora

$$\begin{cases} 3\,x^2-3\,y^2 &= 2\,\lambda\,x \\ -6\,x\,y &= 2\,\lambda\,y \\ x^2+y^2 &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 3\,x^2-3\,y^2 &= 2\,\lambda\,x \\ (\lambda+3\,x)\,y &= 0 \\ x^2+y^2 &= 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3\,x^2-3\,y^2 &= 2\,\lambda\,x \\ y &= 0 \\ x^2+y^2 &= 1 \end{cases} \bigcup \begin{cases} 3\,x^2-3\,y^2 &= 2\,\lambda\,x \\ \lambda &= -3\,x \\ x^2+y^2 &= 1 \end{cases}$$

Analizziamo separatamente adesso gli ultimi due sistemi. Per il primo, dal momento che $y=0$, si vede facilmente che otteniamo i punti

$$P_1 = (1,0) \qquad \text{e} \qquad P_2 = (-1,0),$$

come soluzioni. Per il secondo sistema, sostituendo $\lambda = -3\,x$ nella prima equazione, troviamo

$$\begin{cases} 3\,x^2-3\,y^2 &= -6\,x^2 \\ \lambda &= -3\,x \\ x^2+y^2 &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 9\,x^2-3\,y^2 &= 0 \\ \lambda &= -3\,x \\ x^2+y^2 &= 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 &= y^2/3 \\ \lambda &= -3\,x \\ x^2+y^2 &= 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 &= y^2/3 \\ \lambda &= -3\,x \\ y^2 &= 3/4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 &= y^2/3 \\ \lambda &= -3\,x \\ y &= \pm\sqrt{3}/2. \end{cases}$$

Troviamo quindi le 4 soluzioni seguenti

$$P_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \qquad P_4 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \qquad P_5 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \qquad P_6 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Andiamo adesso a valutare la funzione f su questi 6 punti: si ha

$$f(P_1) = f(P_4) = f(P_6) = 1 \qquad \text{e} \qquad f(P_2) = f(P_3) = f(P_5) = -1.$$

In conclusione

$$\min_E f = -1 \qquad \text{e} \qquad \max_E f = 1,$$

con P_2, P_3, P_5 punti di minimo e P_1, P_4, P_6 punti di massimo. $\square$