

Nome, Cognome .....

Matricola .....

**ANALISI MATEMATICA A & B**

**– PROVA SCRITTA –**

**20 FEBBRAIO 2023**

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA – A.A. 2022/2023

**Libri, appunti e calcolatrici non ammessi**

PRIMA PARTE

- Lo studente scriva solo la risposta, direttamente su questo foglio.
- La seconda parte verrà corretta **esclusivamente** nel caso che lo studente risponda correttamente ad almeno 5 domande su 10 della prima parte.
- Ogni esercizio vale 2 punti, in caso di risposta corretta.

**Esercizio 1.** Si dica per quali valori del parametro  $\alpha \in \mathbb{R}$  la serie seguente converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tan\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) \quad \alpha > \frac{1}{2}$$

**Esercizio 2.** Trovare e classificare i punti critici della funzione  $f(x, y) = xy + x^2y + y^2$

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right) \text{ punto di minimo locale} \quad (0, 0), (-1, 0) \text{ punti sella}$$

**Esercizio 3.** Si calcoli il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x) - x}{x \tan x} = -\frac{1}{2}$$

**Esercizio 4.** Si dica quali tra le seguenti affermazioni risultano corrette per  $x \rightarrow 0$

$$\boxed{e^x - 1 \sim x} \quad 1 - \cos x \sim x^2 \quad \boxed{x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = o(1)} \quad \boxed{1 - \cos x = o(x)} \quad \boxed{(1+x)^{\frac{1}{x}} \sim e}$$

**Esercizio 5.** Si trovi il potenziale  $U$  del campo vettoriale conservativo  $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, x, z)$  tale che  $U(0, 0, 1) = 1$

$$U(x, y, z) = xy + \frac{z^2}{2} + \frac{1}{2}$$

**Esercizio 6.** Si calcoli l'equazione del piano tangente al grafico di  $f(x, y) = x^2y$  nel punto  $(1, 2, f(1, 2))$

$$z = 4x + y - 4$$

**Esercizio 7.** Si calcoli la derivata di  $f(x, y) = \log(x^2 + y)$  nel punto  $(1, 1)$  lungo la direzione  $\omega = (\sqrt{3}/2, 1/2)$

$$\frac{\partial f}{\partial \omega}(1, 1) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4}$$

**Esercizio 8.** Si trovi una primitiva  $F$  della funzione  $f(x) = 2x^3 + 1$

$$F(x) = \frac{x^4}{2} + x$$

**Esercizio 9.** Si calcoli l'area del grafico di  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  definita sull'insieme  $A = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$

$$\text{Area} = \sqrt{2}\pi$$

**Esercizio 10.** Si calcoli il baricentro dell'insieme  $E = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$  rispetto all'asse  $y$

$$\mathbf{b}_E = \left(0, \frac{4}{3\pi}\right)$$

SECONDA PARTE

Lo studente scriva lo svolgimento di ogni esercizio su un foglio a parte.

In questa parte **non** verranno ritenute valide risposte corrette, ma prive di giustificazione.

**Esercizio 11** (7 punti). Sia  $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$ , se ne calcoli il momento d'inerzia rispetto all'asse delle  $z$ .

**Esercizio 12** (9 punti). Si consideri il potenziale

$$U(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Siano  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  la curva definita da

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t^2), \quad \text{per } t \in [0, 2\pi],$$

e  $\Sigma, V \subseteq \mathbb{R}^3$  gli insiemi dati da

$$V = \{(x, y, z) : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\} \quad \text{e} \quad \Sigma = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Si calcoli:

- (1) Il lavoro del campo generato da  $U$  lungo il sostegno di  $\gamma$ ;
- (2) il flusso del campo generato da  $U$  attraverso  $\partial V$ ;
- (3) il flusso del campo generato da  $U$  attraverso  $\Sigma$ .