

Nome, Cognome

Matricola

ANALISI MATEMATICA A & B
– PROVA SCRITTA –

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA – A.A. 2020/2021

Libri, appunti e calcolatrici non ammessi

PRIMA PARTE

- Lo studente scriva solo la risposta, direttamente su questo foglio.
- La seconda parte verrà corretta **esclusivamente** nel caso che lo studente risponda correttamente ad almeno 5 domande su 10 della prima parte.
- Ogni esercizio vale 2 punti, in caso di risposta corretta.

Esercizio 1. Determinare e classificare i punti critici della funzione $f(x, y) = 2xy - x^3 - y^2$

$$(0, 0) \text{ punto sella} \quad \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \text{ punto di massimo locale}$$

Esercizio 2. Si trovi una primitiva F della funzione $f(x) = x^2 \sqrt{1-x^3}$

$$F(x) = -\frac{2}{9} (1-x^3)^{\frac{3}{2}}$$

Esercizio 3. Si trovi il momento d'inerzia dell'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ rispetto all'asse delle x

$$\mathcal{I} = \frac{15}{4} \pi$$

Esercizio 4. Si trovi la lunghezza della curva $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$ con $t \in [0, \pi]$

$$\ell(\gamma) = 3$$

Esercizio 5. Trovare una superficie regolare ϕ il cui sostegno coincida con l'insieme $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \leq -1\}$

$$\phi(t, s) = (2 \cos t \sin s, 2 \sin t \sin s, 2 \cos s) \quad (t, s) \in [0, 2\pi] \times \left[2\frac{\pi}{3}, \pi\right]$$

Esercizio 6. Si dica quali tra i seguenti campi vettoriali risultano **solenoidali ma non conservativi** sul proprio dominio di definizione

$$\mathbf{F}(x, y) = (\cosh x \cos y, -\sinh x \sin y) \quad \mathbf{G}(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}\right) \quad \mathbf{H}(x, y) = (-y, x) \text{ il terzo}$$

Esercizio 7. Si dica per quali $\alpha \geq 0$ la seguente serie numerica risulta convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^\alpha} - \sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right) \alpha > \frac{1}{3}$$

Esercizio 8. Si consideri il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y, x, -z).$$

Calcolare il lavoro L di \mathbf{F} lungo il sostegno della curva $\gamma(t) = (t, \sqrt{1-t^2}, t)$ con $t \in [0, 1]$

$$L = -1/2$$

Esercizio 9. Si calcoli il limite seguente

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1-x+x^2) - x^2 + x - \cos x + 1}{2x(\sqrt{1+x-x^2}-1) - x^2} = -\frac{8}{15}$$

Esercizio 10. Si scriva l'equazione del piano tangente al grafico di $f(x, y) = \arctan(x^2 + y)$ nel punto $(1, 1, f(1, 1))$

$$z = \arctan 2 + (2x)/5 + y/5 - 3/5$$

SECONDA PARTE

Lo studente scriva lo svolgimento di ogni esercizio su un foglio a parte.

In questa parte **non** verranno ritenute valide risposte corrette, ma prive di giustificazione.

Esercizio 11 (8 punti). Consideriamo l'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Sia $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy$, si determinino

$$\max_{x \in D} f(x, y) \quad e \quad \min_{x \in D} f(x, y),$$

calcolando anche i rispettivi punti di massimo e di minimo.

Esercizio 12 (7 punti). Si consideri il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(z^3 x, y, z^2 - \frac{x}{1+y^2} \right).$$

Si calcoli il flusso di \mathbf{F} attraverso il bordo dell'insieme

$$V = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}.$$