Nome, Cognome ....

Matricola ....

ANALISI MATEMATICA
– PROVA SCRITTA –

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA – A.A. 2017/2018

`Libri, appunti e calcolatrici` **non ammessi**

PRIMA PARTE

- Lo studente scriva solo la risposta, direttamente su questo foglio.

- La seconda parte verrà corretta **esclusivamente** *nel caso che lo studente risponda correttamente ad almeno 5 domande su 10 della prima parte.*

- Ogni esercizio vale 2 punti, in caso di risposta corretta.

Esercizio 1. *Trovare il potenziale U del campo vettoriale conservativo $\mathbf{F}(x,y) = (e^x(\sin y - \cos y), e^x(\cos y + \sin y))$*

$$U(x,y) = e^x(\sin y - \cos y)$$

Esercizio 2. *Sia $f(x,y) = x^3 + y^3 + x\,y$. Si dica quali tra i seguenti sono punti di massimo locale per f*

$$(0,0), \qquad (0,-1), \qquad \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right), \qquad (-1,-1)$$

Esercizio 3. *Si calcoli il limite seguente*

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^2\right] = -\frac{1}{6}$$

Esercizio 4. *Tra le serie numeriche seguenti, evidenziare quelle convergenti*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2^n}{e^n} \qquad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\log n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_n^{n+1}\frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt\right)$$

Esercizio 5. *Si calcoli la curvatura κ_γ della curva $\gamma(t) = (\cos t, 2\sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$*

$$\kappa_\gamma(t) = \frac{2}{(\sin^2 + 4\cos^2 t)^{3/2}}$$

Esercizio 6. *Si consideri la superficie regolare $\phi(t,s) = (2\cos t, 3\sin t, s)$. Si dia il versore normale* **entrante** *al sostegno di ϕ nel punto di coordinate $(2,0,3)$*

$$\mathbf{N}_\phi = (-1,0,0)$$

Esercizio 7. *Si calcoli il lavoro del campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y,z) = (0, \cosh y \sin z, \sinh y \cos z)$ lungo l'elica cilindrica $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ con $t \in [0, \pi/2]$*

$$\int_{\mathrm{Im}(\gamma)} \langle \mathbf{F}, \mathbf{T}_\gamma\rangle\, d\ell = \sinh 1$$

Esercizio 8. *Sia $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + y\cos x = 1\}$, si scriva l'equazione della retta tangente a E nel punto $(\pi/2, 1)$*

$$y = 1 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Esercizio 9. *Dare lo sviluppo di Taylor fino all'ordine 3 centrato in 0 con resto di Peano, della funzione*

$$f(x) = \frac{1}{1-\log(1-x)} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

Esercizio 10. *Si dica per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie seguente è convergente*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2\alpha}\sinh\left(\frac{1}{n^{\alpha^2+1}}\right) \qquad \alpha > 2 \qquad e \qquad \alpha < 0$$

Seconda parte

Lo studente scriva lo svolgimento di ogni esercizio su un foglio a parte.

In questa parte **non** *verranno ritenute valide risposte corrette, ma prive di giustificazione.*

Esercizio 11 (7 punti)**.** *Sia* $f(x,y) = y^2 - x^2 + 2\sqrt{3}\,x\,y$ *e sia*

$$E = \{(x,y,z)\,:\,x^2+y^2 \le 9\}.$$

1. *Trovare gli eventuali punti critici di f interni ad E, studiandone la natura (i.e. punti di minimo locale, punti di massimo locale, punti sella).*
2. *Determinare eventuali punti di massimo e punti di minimo assoluti di f su E, calcolando anche*

$$\sup_E f \qquad e \qquad \inf_E f.$$

Soluzione. Osserviamo innanzitutto che la funzione f è di classe C^2 su tutto $\mathbb{R}^2$, quindi possiamo classificare gli eventuali punti critici interni ad E usando il criterio della matrice Hessiana. Troviamo i punti critici: si tratta di trovare le coppie di punti $(x,y) \in E$ tali che

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} -2\,x & + & 2\sqrt{3}\,y & = & 0 \\ 2\sqrt{3}\,x & + & 2\,y & = & 0 \end{array}\right.$$

Si osservi che si tratta di un sistema lineare di 2 equazioni e 2 incognite, con matrice dei coefficienti

$$\left[\begin{array}{cc} -2 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 2 \end{array}\right],$$

invertibile (infatti il suo determinante è diverso da 0). L'unica soluzione del sistema è quindi $(0,0)$, che è punto critico di f interno ad E. Osservando che

$$D^2 f(0,0) = \left[\begin{array}{cc} -2 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 2 \end{array}\right],$$

e che questa matrice simmetrica è indefinita, dal momento che

$$D^2 f(0,0) = -2\cdot 2 - 2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3} = -16 < 0,$$

si ha che $(0,0)$ è **punto sella**.

Per il punto 2., osserviamo che f è continua e l'insieme E è chiuso e limitato (si tratta del cerchio chiuso di centro $(0,0)$ e raggio 3). Possiamo quindi applicare il Teorema di Weierstrass e dire che f ammette sicuramente massimo e minimo su E. Osserviamo anche che dal punto 1., i punti di massimo e minimo di f non possono stare all'interno di E, abbiamo quindi

$$\sup_E f = \max_E f = \max_{\partial E} f \qquad \text{e} \qquad \inf_E f = \min_E f = \min_{\partial E} f.$$

Al fine di calcolarli, utilizziamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange: introducendo la variabile aggiuntiva λ (i.e. il moltiplicatore), dobbiamo quindi risolvere il sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} \nabla f(x,y) & = & \lambda\,\nabla(x^2+y^2-9) \\ x^2+y^2 & = & 9 \end{array}\right.$$

ovvero

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} -2\,x & + & 2\sqrt{3}\,y & = & 2\,\lambda\,x \\ 2\sqrt{3}\,x & + & 2\,y & = & 2\,\lambda\,y \\ x^2 & + & y^2 & = & 9. \end{array}\right.$$

Si osservi che le prime due equazioni del sistema, formano ancora un sistema lineare (nelle variabili x e y solamente!), possiamo riscriverlo come

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} -(1+\lambda)\,x & + & \sqrt{3}\,y & = & 0 \\ \sqrt{3}\,x & + & (1-\lambda)\,y & = & 0 \\ x^2 & + & y^2 & = & 9. \end{array}\right.$$

Distinguiamo adesso tre casi:

- se $\lambda = -1$, la prima equazione del sistema implica che $y = 0$. Usando la terza equazione, si ottiene

$$x = \pm 3,$$

  quindi troviamo due punti $P_1 = (3,0)$ e $P_2 = (-3,0)$, come candidati;

- in modo simmetrico, se $\lambda = 1$, la seconda equazione del sistema implica che $x = 0$. Quindi usando la terza equazione, troviamo

$$y = \pm 3,$$

  ovvero le due coppie di punti $P_3 = (0,3)$ e $P_4 = (0,-3)$;

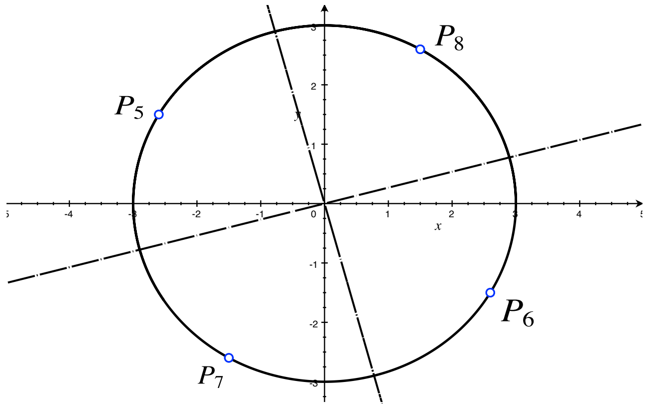

FIGURE 1. I punti di massimo e minimo dell'Esercizio 11. La linea tratteggiata corrisponde alla linea di livello $f(x,y)=0$.

- se $\lambda^2 \neq 1$, allora possiamo tentare di ricavare x e y procedendo per sostituzione nelle prime due equazioni. Si ha quindi

$$\left\{\begin{array}{ccccc} & & y = & (1+\lambda)\,x/\sqrt{3} \\ \sqrt{3}\,x & - & (1-\lambda)\,y & = & 0 \\ x^2 & + & y^2 & = & 9 \end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{ccccc} & & y = & (1+\lambda)\,x/\sqrt{3} \\ \sqrt{3}\,x & + & (1-\lambda^2)\,x/\sqrt{3} & = & 0 \\ x^2 & + & y^2 & = & 9 \end{array}\right.$$

Analizziamo adesso la seconda equazione: essa è verificata per $x=0$, da cui sostituendo nella prima si troverebbe anche $y=0$. Tuttavia la coppia $(0,0)$ non è ammissibile, perché non si trova sul vincolo (ovvero $0^2+0^2\neq 9$). Non abbiamo però trovato tutte le soluzioni: infatti, la seconda equazione si riscrive come

$$(4-\lambda^2)\,x = 0,$$

che è soddisfatta anche nel caso in cui

$$4=\lambda^2 \qquad \text{ovvero per} \qquad \lambda=\pm 2.$$

Sostituendo nella prima equazione, si trova quindi

(1) $$y=-\frac{1}{\sqrt{3}}\,x \qquad \text{oppure} \qquad y=\sqrt{3}\,x.$$

Ci siamo quindi ridotti a risolvere i due sistemi

$$\left\{\begin{array}{ccc} y & = & -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\,x \\ x^2+y^2 & = & 9 \end{array}\right. \qquad \text{e} \qquad \left\{\begin{array}{ccc} y & = & \sqrt{3}\,x \\ x^2+y^2 & = & 9 \end{array}\right.$$

Dal primo, otteniamo le soluzioni

$$P_5=\left(-\frac{3}{2}\sqrt{3},\frac{3}{2}\right), \qquad P_6=\left(\frac{3}{2}\sqrt{3},-\frac{3}{2}\right),$$

mentre dal secondo si ha

$$P_7=\left(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\sqrt{3}\right), \quad P_8=\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\sqrt{3}\right).$$

Calcoliamo adesso f in corrispondenza degli 8 punti trovati. Si ha

$$f(3,0)=f(-3,0)=9, \qquad f(0,3)=f(0,-3)=-9$$
$$f\left(-\frac{3}{2}\sqrt{3},\frac{3}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}\sqrt{3},-\frac{3}{2}\right)=-18,$$
$$f\left(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)=f\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)=18.$$

Abbiamo quindi ottenuto che

$$\sup_E f = 18 \qquad \text{e} \qquad \inf_E f=-18,$$

ed i punti di minimo assoluto sono P_7 e P_8, mentre P_5 e P_6 sono i punti di minimo assoluto.

Questo conclude l'esercizio. $\square$

Esercizio 12 (9 punti)**.** *Sia* $\mathbf{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ *il campo vettoriale dato da*

$$\mathbf{F}(x,y,z)=\left(-\frac{y}{2},\frac{x}{2},z\right).$$

Consideriamo i due sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$

$$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,:\,z=4\,x^2+4\,y^2,\,1\le z\le 2\},$$

e

$$V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,:\,x^2+y^2\le z\le 4\,(x^2+y^2),\,1\le z\le 2\}.$$

Si calcoli:

- *il flusso di* $\mathbf{F}$ *attraverso* ∂V*;*
- *il flusso di* $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ *attraverso* S.

Proof. Si osservi che ∂V è superficie chiusa, possiamo quindi usare il Teorema della Divergenza per calcolare il flusso **uscente** da V. Si ha

$$\begin{aligned}\iint_{\partial V}\langle\mathbf{F},\mathbf{N}\rangle\,d\sigma(x,y,z)&=\iiint_V \operatorname{div}\mathbf{F}(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\\&=\iint_V dx\,dy\,dz,\end{aligned}$$

ovvero il flusso uscente da V è uguale al volume dell'insieme V. Usiamo le coordinate cilindriche per calcolare l'ultimo integrale: si ha

$$\iint_V dx\,dy\,dz=\int_1^2\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\sqrt{z}}{2}}^{\sqrt{z}}\varrho\,d\varrho\,d\vartheta\,dz=2\,\pi\int_1^2\left[\frac{\varrho^2}{2}\right]_{\frac{\sqrt{z}}{2}}^{\sqrt{z}}dz=\frac{3}{4}\,\pi\int_1^2 z\,dz=\frac{9}{8}\,\pi.$$

Per calcolare il flusso del rotore di $\mathbf{F}$ attraverso S, osserviamo che quest'ultima superficie ha bordo. Possiamo usare allora il Teorema di Stokes

$$\iint_S\langle\operatorname{rot}\mathbf{F},\mathbf{N}\rangle\,d\sigma(x,y,z)=\int_{\partial^+S}\langle\mathbf{F},\mathbf{T}\rangle\,d\ell,$$

dove ∂^+S rappresenta il bordo di S, orientato positivamente rispetto alla normale $\mathbf{N}$. Scegliamo per esempio la normale **uscente**, allora ∂^+S è composto da due circonferenze, una percorsa in senso orario e l'altra percorsa in senso antiorario. Possiamo parametrizzarle tramite

$$\gamma_1(t)=\left(\frac{1}{2}\,\cos t,\frac{1}{2}\,\sin t,1\right),\qquad t\in[0,2\,\pi]$$

e

$$\gamma_2(t)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,\cos(2\,\pi-t),\frac{1}{\sqrt{2}}\,\sin(2\,\pi-t),2\right),\qquad t\in[0,2\,\pi].$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}\int_{\partial^+S}\langle\mathbf{F},\mathbf{T}\rangle\,d\ell&=\int_0^{2\pi}\langle\mathbf{F}(\gamma_1(t)),\gamma_1'(t)\rangle\,dt+\int_0^{2\pi}\langle\mathbf{F}(\gamma_2(t)),\gamma_2'(t)\rangle\,dt\\&=\int_0^{2\pi}\left\langle\begin{bmatrix}-(\sin t)/4\\(\cos t)/4\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-(\sin t)/2\\(\cos t)/2\\0\end{bmatrix}\right\rangle dt\\&+\int_0^{2\pi}\left\langle\begin{bmatrix}-(\sin(2\,\pi-t))/(2\,\sqrt{2})\\(\cos(2\,\pi-t))/(2\,\sqrt{2})\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}(\sin(2\,\pi-t))/\sqrt{2}\\-(\cos(2\,\pi-t))/\sqrt{2}\\0\end{bmatrix}\right\rangle dt\\&=\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 t+\cos^2 t}{8}\,dt-\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2(2\,\pi-t)+\cos^2(2\,\pi-t)}{4}\,dt\\&=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

In alternativa, si sarebbe anche potuto calcolare direttamente il flusso del rotore usando la definizione. Infatti, si osservi che

$$\operatorname{rot}\mathbf{F}(x,y,z)=(0,0,1).$$

La superficie S è data come grafico della funzione di due variabili

$$f(x,y)=4\,x^2+4\,y^2,\qquad\text{con }(x,y)\in B=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,\frac{1}{4}\le x^2+y^2\le\frac{1}{2}\right\},$$

ovvero S è una superficie cartesiana. Di conseguenza, si ha

$$\iint_S \langle \operatorname{rot} \mathbf{F}, \mathbf{N} \rangle \, d\sigma(x, y, z) = \iint_B \left\langle \operatorname{rot} \mathbf{F}(x, y, f(x, y)), \begin{bmatrix} -\dfrac{\partial f}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial f}{\partial y} \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle dx \, dy = \iint_B dx \, dy,$$

ovvero il flusso coincide con l'area dell'anello B. Tale area è data da

$$\pi \frac{1}{2} - \pi \frac{1}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Si osservi che abbiamo ottenuto lo stesso risultato di prima, ma col segno sbagliato: questo è dovuto al fatto che nel secondo metodo abbiamo orientato la normale $\mathbf{N}$ in modo opposto. Quindi i due metodi conducono effettivamente allo stesso risultato. $\square$