Nome, Cognome ....

Matricola ....

ANALISI MATEMATICA A & B
– PROVA SCRITTA DEL 17 GENNAIO 2022 –

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA – A.A. 2021/2022

`Libri, appunti e calcolatrici` **non ammessi**

PRIMA PARTE

- Lo studente scriva solo la risposta, direttamente su questo foglio.

- La seconda parte verrà corretta **esclusivamente** *nel caso che lo studente risponda correttamente ad almeno 5 domande su 10 della prima parte.*

- Ogni esercizio vale 2 punti, in caso di risposta corretta.

Esercizio 1. *Si calcoli il lavoro del campo vettoriale* $\mathbf{F}(x,y)=(x,y)$ *lungo la curva* $\gamma(t)=(e^t\cos(t^2),e^t\sin(t^2))$ *con* $t\in[0,1]$

$$L=\frac{e^2-1}{2}$$

Esercizio 2. *Si calcoli la lunghezza della curva* $\gamma(t)=(t,\cos t,\sin t)$ *definita per* $t\in[0,2]$

$$\ell(\gamma)=2\sqrt{2}$$

Esercizio 3. *Siano* $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,x^2+9\,y^2\le 1\}$ *e* $f(x,y)=x+2\,y$. *Si calcolino*

$$\min_E f=-\frac{\sqrt{13}}{3}\qquad\qquad \max_E f=\frac{\sqrt{13}}{3}$$

Esercizio 4. *Si calcoli il seguente limite*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\log(1+x-x^2)}{e^{x-x^2}-1-\sin x}=-3$$

Esercizio 5. *Si dica quali tra le seguenti affermazioni risultano corrette per* $x\to 0$

$$x^3=o(x^4)\qquad x^2+1\sim x^2\qquad \boxed{x^2+x\sim x}\qquad \frac{x-\sin x}{x}\sim 0\qquad \boxed{1-\cos x\sim\frac{e^{x^2}-1}{2}}$$

Esercizio 6. *Trovare e classificare i punti critici della funzione* $f(x,y)=x^3+3\,x\,y+y^2$

$(0,0)$ *sella* $\qquad$ $\left(\frac{3}{2},-\frac{9}{4}\right)$ *minimo locale*

Esercizio 7. *Si scriva l'equazione del piano tangente al grafico della funzione* $f(x,y)=1/\arctan(x+y)$ *nel punto* $(1,0,f(1,0))$

$$z=\frac{4}{\pi}-\frac{8}{\pi^2}\,(x-1)-\frac{8}{\pi^2}\,y$$

Esercizio 8. *Si dia lo sviluppo di Taylor all'ordine* 3 *centrato in* $x=0$ *con resto di Peano della funzione*

$$\log(1+x+x^3)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{4}{3}\,x^3+o(x^3)$$

Esercizio 9. *Si dica quali tra le seguenti serie sono convergenti*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2\,n)!}{(3\,n)!}\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{n!}\,\tan\left(\frac{1}{n^4}\right)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3-n^2+n}{n^4+3\,n^2+1}$$ *prima, seconda e terza*

Esercizio 10. *Si trovi una primitiva* F *della funzione* $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$

$$F(x)=-\frac{1+x}{e^x}$$

Seconda parte

Lo studente scriva lo svolgimento di ogni esercizio su un foglio a parte.

In questa parte **non** *verranno ritenute valide risposte corrette, ma prive di giustificazione.*

Esercizio 11 (7 punti). *Siano*

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 \le 1,\, -1 \le z \le 1\} \qquad e \qquad B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}.$$

Si calcoli il momento d'inerzia del solido tridimensionale $E \setminus B$ rispetto all'asse delle z.

Soluzione. L'insieme in questione un cilindro avente come asse di simmetria rotazionale l'asse delle z e come sezione un cerchio di raggio 1, da cui si toglie la palla centrata in $(0,0,0)$ e di raggio 1. In base alla definizione di momento d'inerzia, si tratta di calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_{E\setminus B} (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz.$$

Si possono usare le coordinate cilindriche

$$x = \varrho \cos\vartheta, \quad y = \varrho \sin\vartheta, \qquad z = z,$$

con

$$z \in [-1,1], \qquad \vartheta \in [0, 2\pi], \qquad \sqrt{1 - z^2} \le \varrho \le 1.$$

L'integrale da calcolare diventa quindi

$$\begin{aligned}
\iiint_{E\setminus B} (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz &= \int_{-1}^{1} \int_{0}^{2\pi} \int_{\sqrt{1-z^2}}^{1} \varrho^2\, \varrho\, d\varrho\, d\vartheta\, dz \\
&= 2\pi \int_{-1}^{1} \left[\frac{\varrho^4}{4}\right]_{\sqrt{1-z^2}}^{1} dz \\
&= \frac{\pi}{2} \int_{-1}^{1} \left[1 - (1 - z^2)^2\right] dz.
\end{aligned}$$

Svolgendo l'ultimo integrale, si trova la quantità desiderata. □

Esercizio 12 (6 punti). *Sia $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ il potenziale dato da*

$$U(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4.$$

Si calcoli il flusso del campo vettoriale generato da U, attraverso la sfera di raggio 2 centrata nel punto $(0,0,2)$.

Proof. Il campo vettoriale in questione è dato da

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \nabla U(x,y,z) = (4\,x^3, 4\,y^3, 4\,z^3).$$

Se indichiamo con $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + (z-2)^2 \le 4\}$, il flusso si può calcolare utilizzando il Teorema della divergenza, ovvero

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \iint_{\partial B} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N} \rangle\, d\sigma(x,y,z) = \iiint_B \mathrm{div}\mathbf{F} dx\, dy\, dz.$$

La divergenza di $\mathbf{F}$ è data da

$$\mathrm{div}\mathbf{F}(x,y,z) = 12\,(x^2 + y^2 + z^2).$$

Per svolgere l'integrale triplo, si possono usare le coordinate sferiche, centrate in $(0,0,2)$. □