Nome, Cognome ....

Matricola ....

ANALISI MATEMATICA
– PROVA SCRITTA –

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA – A.A. 2019/2020

`Libri, appunti e calcolatrici` **non ammessi**

PRIMA PARTE

- Lo studente scriva solo la risposta, direttamente su questo foglio.

- La seconda parte verrà corretta **esclusivamente** *nel caso che lo studente risponda correttamente ad almeno 5 domande su 10 della prima parte.*

- Ogni esercizio vale 2 punti, in caso di risposta corretta.

Esercizio 1. *Si scriva l'equazione del piano tangente al grafico della funzione* $f(x) = x^2 + y^2$ *nel punto* $(1, 1, 2)$.

$$z = 2\,x + 2\,y - 2$$

Esercizio 2. *Si trovi una primitiva* F *della funzione* $f(x) = x\,e^x$.

$$F(x) = (x - 1)\,e^x$$

Esercizio 3. *Si calcoli il momento d'inerzia dell'insieme* $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \in [0, 1],\ y \in [0, 1]\}$ *rispetto all'asse* $x = 1/2$

$$M = \frac{1}{12}$$

Esercizio 4. *Si calcolino il versore tangente* $\mathbf{T}_\gamma$ *ed il versore normale* $\mathbf{N}_\gamma$ *alla curva* $\gamma(t) = (t\,\cos t, t\,\sin t)$

$$\mathbf{T}_\gamma(t) = \left(\frac{\cos t - t\,\sin t}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{\sin t + t\,\cos t}{\sqrt{1+t^2}}\right) \qquad \mathbf{N}_\gamma(t) = \left(\frac{\sin t + t\,\cos t}{\sqrt{1+t^2}}, -\frac{\cos t - t\,\sin t}{\sqrt{1+t^2}}\right)$$

Esercizio 5. *Si calcoli il lavoro del campo di Biot-Savart* $\mathbf{F}_{BS}(x, y, z) = (-y/(x^2+y^2), x/(x^2+y^2), 0)$ *lungo la curva* $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 1)$ *con* $t \in [0, \pi]$

$$L = \pi$$

Esercizio 6. *Si trovi un potenziale* U *del campo vettoriale* $\mathbf{F}(x, y) = (x/(x^2 + y^2), y/(x^2 + y^2))$

$$U(x, y) = \log\sqrt{x^2 + y^2}$$

Esercizio 7. *Si dia una superficie* ϕ *il cui sostegno coincida con l'insieme* $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (x-1)^2+(y+1)^2+z^2 = 4\}$

$$\phi = (1 + 2\,\cos\vartheta\,\sin\varphi, -1 + 2\,\sin\vartheta\,\sin\varphi, 2\,\cos\varphi), \qquad (\vartheta, \varphi) \in [0, 2\,\pi] \times [0, \pi]$$

Esercizio 8. *Si calcoli il limite seguente*

$$\lim_{x \to 0} \frac{(e^x - 1 - x)\,\sin(x + 1)}{\log(1 - x) + x} = -\sin(1)$$

Esercizio 9. *Si dia la sviluppo di Taylor all'ordine* 3 *centrato in* $x = 0$ *con resto di Peano della funzione*

$$\log(1 + x - x^2) = x - \frac{3}{2}\,x^2 + \frac{4}{3}\,x^3 + o(x^3)$$

Esercizio 10. *Dire quali tra le seguenti serie numeriche risultano convergenti*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n + \log n}{n\,6^n} \qquad \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n + 2}} \qquad \boxed{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2\,\log_2 n}}$$

Seconda parte

Lo studente scriva lo svolgimento di ogni esercizio su un foglio a parte.

In questa parte **non** *verranno ritenute valide risposte corrette, ma prive di giustificazione.*

Esercizio 11 (7 punti)**.** *Sia* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *la funzione definita da*

$$f(x, y, z) = x^3 - y + z$$

e sia

$$E = \Big\{(x, y, z) \,:\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\Big\}.$$

Si trovino il massimo ed il minimo di f *su* E.

Soluzione. Notiamo innanzitutto che l'insieme E è chiuso e limitato (si tratta di una palla chiusa di centro $(0, 0, 0)$ e raggio 1) e la funzione f è ivi continua. Per il *Teorema di Weierstrass*, abbiamo dunque che f ammette sicuramente massimo e minimo su E.

Dal momento che f è una funzione almeno C^1, usiamo il *Teorema di Fermat* per individuare eventuali punti di massimo o minimo interni ad E. Dal momento che

$$\nabla f(x, y, z) = (3\,x^2, -1, 1),$$

non si annulla mai, abbiamo che i punti cercati non si trovano all'interno di E.

Analizziamo quindi la situazione sulla frontiera

$$\partial E = \Big\{(x, y, z) \,:\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\Big\}.$$

Dal momento che $G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ è una funzione C^1 e

$$\nabla G(x, y, z) \neq (0, 0, 0), \qquad \text{per ogni } (x, y, z) \in \partial E,$$

si tratta di un vincolo regolare e possiamo quindi applicare il *Teorema dei moltiplicatori di Lagrange* per individuare i punti di massimo e minimo. Introduciamo quindi la variabile aggiuntiva λ e risolviamo il sistema non-lineare

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) &= \lambda\,\nabla G(x, y, z) \\ G(x, y, z) &= 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} 3\,x^2 &= 2\,\lambda\,x \\ -1 &= 2\,\lambda\,y \\ 1 &= 2\,\lambda\,z \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1. \end{cases}$$

Partiamo dalla prima equazione, per cui abbiamo due possibilità

$$x = 0 \qquad \text{oppure} \qquad x \neq 0 \text{ e } 3\,x = 2\,\lambda.$$

Nel primo caso, abbiamo dunque

$$\begin{cases} x &= 0 \\ -1 &= 2\,\lambda\,y \\ 1 &= 2\,\lambda\,z \\ y^2 + z^2 &= 1. \end{cases}$$

e la seconda e la terza equazione ci dicono che deve aversi $y = -z$. Sostituendo nella quarta equazione, abbiamo allora

$$2\,y^2 = 1 \qquad \text{ovvero } y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Abbiamo quindi trovato i punti

$$P_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad \text{e} \qquad P_2 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Risolviamo adesso il sistema iniziale, per caso in cui $x \neq 0$ e $3\,x = 2\,\lambda$, ovvero

$$\begin{cases} 3\,x &= 2\,\lambda \\ -1 &= 2\,\lambda\,y \\ 1 &= 2\,\lambda\,z \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1. \end{cases}$$

Le prime tre equazioni ci dicono quindi che deve valere

$$y = -z \qquad \text{e} \qquad y = -\frac{1}{3\,x}. \tag{1}$$

Sostituendo nella quarta equazione, otteniamo allora

$$x^2 + \frac{1}{9\,x^2} + \frac{1}{9\,x^2} = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 9\,x^4 - 9\,x^2 + 2 = 0.$$

Ponendo $t = x^2$, si ottiene

$$t_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81-72}}{18} = \frac{9 \pm 3}{18} = \frac{3 \pm 1}{6}.$$

da cui quindi

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} \qquad x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$$

Ricordando le relazioni (1), abbiamo quindi trovato i punti

$$P_3 = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}\right) \qquad P_4 = \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}, -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$$

$$P_5 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \qquad P_6 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Valutiamo adesso f in corrispondenza di questi 6 punti, per determinare il massimo ed il minimo. Si ha

$$f(P_1) = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2} \qquad f(P_2) = -f(P_1) = \sqrt{2}$$

$$f(P_3) = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \qquad f(P_4) = -f(P_3) = -\frac{5\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$$

$$f(P_5) = \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{7}{3\sqrt{3}} \qquad f(P_6) = -f(P_5) = -\frac{7}{3\sqrt{3}}$$

Osservando che

$$\sqrt{2} > \frac{5\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} > \frac{7}{3\sqrt{3}},$$

abbiamo dunque che P_2 è punto di massimo, P_1 è punti di minimo e

$$\max_E f = \sqrt{2} \qquad \min_E f = -\sqrt{2}.$$

Questo conclude l'esercizio. □

Esercizio 12 (7 punti)**.** *Si consideri il campo vettoriale*

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (y, x, z\,(x^2+y^2))$$

e se ne calcoli il flusso attraverso la frontiera dell'insieme

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4\right\}.$$

Si calcoli inoltre il momento d'inerzia di Ω rispetto all'asse z.

Soluzione. Il flusso è dato da

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \iint_{\partial\Omega} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N}_{\partial\Omega}\rangle \, d\sigma,$$

e possiamo usare il *Teorema della Divergenza* per calcolarlo, ovvero

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \iint_{\partial\Omega} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N}_{\partial\Omega}\rangle \, d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}\mathbf{F}\, dx\, dy\, dz.$$

Osserviamo che

$$\operatorname{div}\mathbf{F}(x,y,z) = x^2+y^2,$$

quindi

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \iiint_{\Omega} (x^2+y^2)\, dx\, dy\, dz.$$

Usiamo le coordinate sferiche per calcolare questo integrale, ovvero

$$x = \varrho\cos\vartheta\,\sin\varphi, \qquad y = \varrho\sin\vartheta\,\sin\varphi, \qquad z = \varrho\cos\varphi,$$

con $1 \le \varrho \le 2$, $0 \le \vartheta \le 2\pi$ e $0 \le \varphi \le \pi$. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathbf{F}} = \iiint_{\Omega} (x^2+y^2)\, dx\, dy\, dz &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_1^2 \varrho^2\,\sin^2\varphi\,\varrho^2\,\sin\varphi\, d\vartheta\, d\varphi\, d\varrho \\ &= 2\pi\left(\int_0^{\pi}\sin^3\varphi\, d\varphi\right)\left(\int_1^2 \varrho^4\, d\varrho\right) \\ &= 2\pi\left(\int_0^{\pi}\left(\sin\varphi - \sin\varphi\,\cos^2\varphi\right)d\varphi\right)\left(\int_1^2\varrho^4\, d\varrho\right) \\ &= 2\pi\left[-\cos\varphi + \frac{\cos^3\varphi}{3}\right]_0^{\pi}\left[\frac{\varrho^5}{5}\right]_1^2.\end{aligned}$$

Per quanto riguarda il momento d'inerzia di Ω, ci basta osservare che

$$\operatorname{dist}\big((x,y,z),\{x=y=0\}\big) = x^2 + y^2,$$

quindi esso è dato da

$$\iiint_\Omega (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz,$$

che abbiamo già calcolato prima. $\square$