

Nome, Cognome .....

Matricola .....

**ANALISI MATEMATICA A+B**  
**– PROVA SCRITTA DEL 16 GENNAIO 2023 –**

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA – A.A. 2022/2023

**Libri, appunti e calcolatrici non ammessi**

PRIMA PARTE

- Lo studente scriva solo la risposta, direttamente su questo foglio.
- La seconda parte verrà corretta **esclusivamente** nel caso che lo studente risponda correttamente ad almeno 5 domande su 10 della prima parte.
- Ogni esercizio vale 2 punti, in caso di risposta corretta.

**Esercizio 1.** Si calcoli l'area del grafico della funzione  $f(x, y) = xy$  definita su  $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$

$$\text{Area} = \frac{\pi}{3} \left( 2^{\frac{3}{2}} - 1 \right)$$

**Esercizio 2.** Si scriva l'equazione del piano tangente al grafico della funzione  $f(x, y) = x \arctan y$  nel punto  $(1, 1, f(1, 1))$ .

$$z = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}(x - 1) + \frac{1}{2}(y - 1)$$

**Esercizio 3.** Si trovi una primitiva  $F$  della funzione  $f(x) = x^2 \cos x$

$$F(x) = x^2 \sin x - 2 \sin x + 2x \cos x$$

**Esercizio 4.** Si calcoli il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x+x^2} - \sin x - 1}{\log(1+x-x^2) - x} = -1$$

**Esercizio 5.** Sia  $E = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ , si calcolino

$$\min_{(x,y) \in E} (x + 3y) = -\sqrt{10} \qquad \max_{(x,y) \in E} (x + 3y) = \sqrt{10}$$

**Esercizio 6.** Si trovino i punti critici della funzione  $f(x, y) = 2xy^2 - y^3 - x$ , classificandoli

$$\left( \frac{3}{4\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad \left( -\frac{3}{4\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \text{ punti sella}$$

**Esercizio 7.** Si calcoli il lavoro del campo vettoriale  $\mathbf{F}(x, y) = (y \sin(xy), x \sin(xy))$  lungo il sostegno della curva  $\gamma(t) = (t, e^t)$ , con  $t \in [0, \pi]$

$$L = 1 - \cos(\pi e^\pi)$$

**Esercizio 8.** Si dica per quali valori del parametro  $\alpha \in \mathbb{R}$  la seguente serie risulta convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \left( \frac{n+14}{n^\alpha} \right) \quad \text{per } \alpha > 3$$

**Esercizio 9.** Si dia lo sviluppo di Taylor, centrato in  $x_0 = 0$  all'ordine 3 con resto di Peano, della funzione seguente

$$\frac{1}{1 + \sin x} = 1 - x + x^2 - \frac{5}{6}x^3 + o(x^3) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

**Esercizio 10.** Si calcoli il momento d'inerzia del triangolo di vertici  $(-1, 0)$ ,  $(1, 0)$  e  $(0, 2)$  rispetto all'asse delle  $y$

$$M = \frac{1}{3}$$

SECONDA PARTE

Lo studente scriva lo svolgimento di ogni esercizio su un foglio a parte.

In questa parte **non** verranno ritenute valide risposte corrette, ma prive di giustificazione.

**Esercizio 11** (7 punti). Sia  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1, 0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1\}$ , si calcoli l'integrale doppio

$$\iint_A \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy.$$

**Esercizio 12** (7 punti). Sia  $\mathbf{B}$  il campo vettoriale definito da

$$\mathbf{B}(x, y, z) = \left( -\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right).$$

- (1) Si trovi il dominio di definizione  $D$  del campo  $\mathbf{B}$ ;
- (2) si dica se  $\mathbf{B}$  è conservativo su  $D$ . In caso affermativo, se ne calcoli un potenziale;
- (3) si dica se  $\mathbf{B}$  è solenoidale su  $D$ ;
- (4) si calcoli il flusso di  $\mathbf{B}$  attraverso gli insiemi  $\Sigma$  e  $\partial E$ , dove

$$\Sigma = \{(x, y, z) : x = 1, 0 \leq z \leq 1, 0 \leq y \leq 1\} \quad e \quad E = \{(x, y, z) : (x - 2)^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$