Nome, Cognome ....

Matricola ....

ANALISI MATEMATICA
– PROVA SCRITTA –

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA – A.A. 2018/2019

`Libri, appunti e calcolatrici` **`non ammessi`**

PRIMA PARTE

- Lo studente scriva solo la risposta, direttamente su questo foglio.

- La seconda parte verrà corretta **esclusivamente** *nel caso che lo studente risponda correttamente ad almeno 5 domande su 10 della prima parte.*

- Ogni esercizio vale 2 punti, in caso di risposta corretta.

Esercizio 1. *Si calcoli il lavoro L del campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y,z) = (y\,z\,e^{x\,y\,z}, x\,z\,e^{x\,y\,z}, x\,y\,e^{x\,y\,z})$ lungo la curva $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ con $t \in [0, \pi/3]$*

$$L = e^{\frac{\sqrt{3}}{12}\pi} - 1$$

Esercizio 2. *Si trovi una primitiva F della funzione $f(x) = \arctan(2\,x)$.*

$$F(x) = x\,\arctan(2\,x) - \frac{1}{4}\log(1 + 4\,x^2)$$

Esercizio 3. *Si calcoli il seguente limite*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}\,(\sqrt{n^2+1} - n) = \frac{1}{2\,e}$$

Esercizio 4. *Si calcoli il momento di inerzia M dell'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \le 1,\, x\,y \ge 0\}$ rispetto all'asse delle x*

$$M = \frac{\pi}{8}$$

Esercizio 5. *Si dica per quali α la serie seguente risulta convergente*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \log n}{n^{2\,\alpha+1}} \qquad \alpha > 1/2$$

Esercizio 6. *Si trovi un potenziale U del campo conservativo $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2\,y, x^3/3 + 2\,y\,z, y^2)$*

$$U(x,y,z) = \frac{x^3}{3}\,y + y^2\,z$$

Esercizio 7. *Si calcoli il limite seguente*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x) - \sin(x)}{\log(1-x) - 1 + e^x} = 1$$

Esercizio 8. *Si dia una curva γ il cui sostegno coincida con l'insieme $\Sigma = \{(x,y,z) \,:\, x^2+y^2+z^2 = 1, z = \sqrt{x^2+y^2}\}$*

$$\gamma(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t, \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ per } t \in [0, 2\,\pi]$$

Esercizio 9. *Dire quali tra le seguenti serie numeriche risultano convergenti*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt[3]{n}} - \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}\right] \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\right)$$

Esercizio 10. *Si scriva l'equazione del piano tangente al grafico della funzione $f(x,y) = \arccos(x+y)$ nel punto $(1/2, 0, \pi/3)$.*

$$z = \frac{\pi}{3} - \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{2}{\sqrt{3}}\,y$$

Seconda parte

Lo studente scriva lo svolgimento di ogni esercizio su un foglio a parte.

In questa parte **non** *verranno ritenute valide risposte corrette, ma prive di giustificazione.*

Esercizio 11 (9 punti)**.** *Sia* $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x| \le 2,\, |y| \le 2\}$ *e sia* $f(x, y) = x\,y\,(1 + x + y)$. *Si determinino*

$$\max_E f \qquad e \qquad \min_E f,$$

ed i rispettivi punti di massimo e minimo. Si determinino anche altri eventuali punti critici di f *appartenenti a* E*, classificandoli (punti di massimo locale, punti di minimo locale, punti sella).*

Soluzione. Si osservi che E è un insieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^2$, mentre f è continua su $\mathbb{R}^2$ (e quindi in particolare anche su E). Per il Teorema di Weierstrass, la funzione f ammette massimo e minimo su E.

Cominciamo trovando i punti critici di f. Dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} y\,(1 + 2\,x + y) & = & 0 \\ x\,(1 + 2\,y + x) & = & 0 \end{cases}$$

Non è difficile vedere che tale sistema ha le seguenti soluzioni

$$P_1 = (0, 0), \quad P_2 = (-1, 0), \quad P_3 = (0, -1), \quad P_4 = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

Osserviamo anche che tutti e quattro questi punti appartengono all'interno di E. Studiamo la natura di questi punti: calcoliamo la matrice Hessiana di f

$$D^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} 2\,y & 1 + 2\,x + 2\,y \\ 1 + 2\,x + 2\,y & 2\,x \end{bmatrix}$$

da cui otteniamo

$$D^2 f(P_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{ indefinita } \Longrightarrow P_1 \text{ punto sella}$$

$$D^2 f(P_2) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{ indefinita } \Longrightarrow P_2 \text{ punto sella}$$

$$D^2 f(P_3) = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{ indefinita } \Longrightarrow P_3 \text{ punto sella}$$

$$D^2 f(P_4) = \begin{bmatrix} -2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -2/3 \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{ definita negativa } \Longrightarrow P_4 \text{ punto di minimo locale}$$

Eventualmente il massimo di f su E potrebbe essere assunto in P_4, calcoliamo quindi quanto vale f in tale punto

$$f(P_4) = \frac{1}{27}.$$

Dobbiamo adesso studiare f sul bordo ∂E di E. Si osservi che E è un quadrato di lato 4, centrato in $(0, 0)$. Come tale, il suo bordo ∂E è un vincolo regolare, tranne nei quattro punti

$$P_5 = (2, 2), \quad P_6 = (-2, 2), \quad P_7 = (2, -2), \quad P_8 = (-2, -2),$$

che corrispondono ai quattro vertici del quadrato. Calcoliamo quanto vale f in questi punti singolari:

$$f(P_5) = 20, \qquad f(P_6) = f(P_7) - 4, \qquad f(P_8) = -12.$$

Studiamo adesso il comportamento di f lungo ogni lato del quadrato: in altre parole, dobbiamo studiare le quattro funzioni di una variabile

$$g_1(x) = f(x, 2) = 6\,x + 2\,x^2, \qquad \text{per } -2 < x < 2,$$
$$g_2(x) = f(x, -2) = 2\,x - 2\,x^2, \qquad \text{per } -2 < x < 2,$$
$$g_3(y) = f(2, y) = 6\,y + 2\,y^2, \qquad \text{per } -2 < y < 2,$$
$$g_4(y) = f(-2, y) = 2\,y - 2\,y^2, \qquad \text{per } -2 < y < 2.$$

Annullando la derivata delle quattro funzioni precedenti, troviamo quindi i seguenti ulteriori candidati

$$P_9 = \left(-\frac{3}{2}, 2\right), \quad P_{10} = \left(\frac{1}{2}, -2\right), \quad P_{11} = \left(2, -\frac{3}{2}\right), \quad P_{12} = \left(-2, \frac{1}{2}\right).$$

Osservando che

$$f(P_9) = f(P_11) = -\frac{15}{2} \qquad \text{e} \qquad f(P_{10}) = f(P_{12}) = \frac{1}{2},$$

otteniamo infine per confronto

$$\max_E f = f(P_5) = 20 \qquad \text{e} \qquad \min_E f = f(P_8) = -12.$$

□

Esercizio 12 (7 punti)**.** *Si consideri il potenziale* $U(x,y,z)=\log\sqrt{x^2+y^2}$*, definito su* $\mathbb{R}^3\setminus\{x=y=0\}$*:*

(1) *si calcoli il flusso del campo vettoriale conservativo* ∇U *attraverso il bordo dell'insieme*

$$\Sigma=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,:\,x^2+y^2+z^2\le 1,\ \frac{1}{2}\le z\le\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}\setminus\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,:\,z\ge\sqrt{x^2+y^2}\}$$

(2) *si ponga*

$$\mathbf{B}=\left(-\frac{\partial U}{\partial y},\frac{\partial U}{\partial x},0\right),$$

e si calcoli il lavoro di $\mathbf{B}$ *lungo il bordo della superficie*

$$S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,:\,x^2+y^2+z^2=1,\ z\le\frac{1}{\sqrt{2}}\right\};$$

(3) *si dica se* $\mathbf{B}$ *è conservativo, motivando adeguatamente la risposta.*

Soluzione. Osserviamo innanzitutto che

$$\nabla U(x,y,z)=\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2},0\right),\qquad\text{per }(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\setminus\{x=y=0\},$$

e che

$$\operatorname{div}(\nabla U(x,y,z))=\Delta U(x,y,z)=0,\qquad\text{per }(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\setminus\{x=y=0\}.$$

Procediamo adesso per punti:

(1) osserviamo innanzitutto che il campo vettoriale ∇U è C^1 sulla chiusura dell'insieme Σ. Dovendo calcolare il flusso di ∇U attraverso una superficie senza bordo, possiamo quindi usare il Teorema della Divergenza, così da ottenere

$$\Phi_\Sigma(\nabla U)=\iint_{\partial\Sigma}\langle\nabla U,\mathbf{N}\rangle\,d\sigma=\iiint_\Sigma\operatorname{div}(\nabla U)\,dx\,dy\,dz=0;$$

(2) osserviamo che il campo vettoriale $\mathbf{B}$ è dato da

$$\mathbf{B}=\left(-\frac{y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2},0\right),\qquad\text{per }(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\setminus\{x=y=0\}.$$

Si osservi che il bordo di S è dato dalla circonferenza di centro $(0,0,1/\sqrt{2})$ e raggio $1/\sqrt{2}$, giacente nel piano $z=1/\sqrt{2}$. Per calcolare il lavoro, possiamo usare direttamente la definizione

$$L=\int_{\partial^+S}\langle\mathbf{B},\mathbf{T}\rangle\,d\ell.$$

La scelta dell'orientazione di S (e di conseguenza quella di ∂^+S) è arbitraria: prendiamo per esempio la normale di S entrante, di conseguenza parametrizziamo ∂^+S tramite

$$\gamma(t)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t,\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t,\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\qquad t\in[0,2\pi].$$

Si ha dunque

$$L=2\int_0^{2\pi}\left\langle\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t,\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t,0\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t,\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t,0\right)\right\rangle dt=2\pi.$$

(3) il campo $\mathbf{B}$ non è conservativo, dal momento che abbiamo trovato un circuito regolare lungo cui il lavoro di $\mathbf{B}$ non è nullo. Si osservi che

$$\operatorname{rot}\mathbf{B}=\mathbf{0},$$

ma ciò non contraddice l'affermazione precedente, dal momento che l'insieme su cui è definito $\mathbf{B}$ non è stellato.

□