Nome, Cognome ....

Matricola ....

ANALISI MATEMATICA A & B
– PROVA SCRITTA –
13 GENNAIO 2025

CORSO DI LAUREA IN
INGEGNERIA MECCANICA – A.A. 2024/2025

`Libri, appunti e calcolatrici` **non ammessi**

PRIMA PARTE

- Lo studente scriva solo la risposta, direttamente su questo foglio.

- La seconda parte verrà corretta **esclusivamente** *nel caso in cui lo studente risponda correttamente ad almeno 5 domande su 10 della prima parte.*

- Ogni esercizio vale 2 punti, in caso di risposta completa e corretta

Esercizio 1. *Si dica quali tra le seguenti affermazioni risultano vere*

$\boxed{x^2 = o(x) \ \text{se } x \to 0}$, $\quad \sin x \sim x$ se $x \to 1$, $\quad \boxed{\cos x - 1 = o(x) \ \text{se } x \to 0}$, $\quad \left(\frac{1000}{999}\right)^x = o(x^{100})$, se $x \to +\infty$

Esercizio 2. *Trovare il potenziale nullo in* $(0,0,-1)$ *del campo vettoriale* $\mathbf{F}(x,y,z) = (x\,y\,z, 2 + (x^2\,z)/2, (x^2\,y)/2)$

$$U(x,y,z) = \frac{x^2}{2}\,y\,z + 2\,y$$

Esercizio 3. *Trovare e classificare i punti critici della funzione* $f(x,y) = x^2\,y + x - y^2$

$$\left(-1, \frac{1}{2}\right) \qquad \textit{punto sella}$$

Esercizio 4. *Si dia una superficie regolare il cui sostegno sia* $\Sigma = \{(x,y,z)\,:\, x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ y \ge 0,\ |z| \le 1/2\}$

$$\phi(t,s) = (\cos t\,\sin s, \sin t\,\sin s, \cos s) \qquad (t,s) \in [0,\pi] \times \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\,\pi}{3}\right]$$

Esercizio 5. *Si scriva l'equazione del piano tangente al grafico di* $f(x,y) = \arctan(x^2\,y)$ *nel punto* $(1,1,f(1,1))$

$$z = \frac{\pi}{4} + (x-1) + \frac{1}{2}\,(y-1)$$

Esercizio 6. *Si dia lo sviluppo di Taylor all'ordine* 3 *centrato in* $x = 0$ *con resto di Peano per la seguente funzione*

$$\log(1 + x - x^3) = x - \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}\,x^3 + o(x^3)$$

Esercizio 7. *Si dica quali tra le seguenti serie numeriche risultano convergenti*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,\log\left(1 + \frac{1}{n!}\right) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - n}{7\,n^3 + 2\,n - 1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^{10} \cdot 3^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

prima, quarta

Esercizio 8. *Si calcoli la lunghezza del sostegno della curva* $\gamma(t) = (t - \sin t, \cos t)$ *con* $t \in [0, \pi/2]$

$$\ell(\gamma) = 4\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Esercizio 9. *Calcolare il limite seguente*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x + x^3) - x - x^3}{e^x - 2 - \sin x + \cos x} = -\frac{1}{2}$$

Esercizio 10. *Sia* $E = \{(x,y)\,:\, x^2 + 4\,y^2 \le 1\}$, *si determinino*

$$\max_{(x,y)\in E}(x^2 + y) = \frac{17}{16} \qquad \min_{(x,y)\in E}(x^2 + y) = -\frac{1}{2}$$

SECONDA PARTE

Lo studente scriva lo svolgimento di ogni esercizio su un foglio a parte.

In questa parte **non** *verranno ritenute valide risposte corrette, ma prive di giustificazione.*

Esercizio 11 (9 punti)**.** *Si consideri la funzione definita da*

$$f(x) = \arctan\left|\frac{2\,x+1}{x+2}\right|.$$

(1) *Determinare il dominio di definizione D di f;*

(2) *si studi il segno della funzione f, trovando eventuali punti in cui annulla;*

(3) *si calcolino i limiti di f in eventuali punti di accumulazione di D, che non appartengano a D stesso (compresi eventualmente $+\infty$ o $-\infty$);*

(4) *si determini il dominio di derivabilità D', ovvero l'insieme dei punti in cui f è derivabile;*

(5) *si studino gli intervalli di monotonia di f;*

(6) *si calcolino*

$$\sup_{x\in D} f(x) \qquad e \qquad \inf_{x\in D} f(x),$$

specificando se tali valori sono assunti, i.e. se f ammette massimo e/o minimo su D;

(7) *si calcolino i limiti da destra e da sinistra di f' in eventuali puntuali di accumulazione di D', che non appartengano a D' stesso.*

Si tracci infine un grafico approssimato di f, che tenga conto di quanto trovato nei punti precedenti.

Soluzione. Procediamo per punti.

(1) Osserviamo che sicuramente deve risultare $x \neq -2$. Non ci sono ulteriore restrizioni, per cui il dominio della funzione risulta essere $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$;

(2) ricordando che l'arcotangente è positiva per argomenti positivi, otteniamo che

$$f(x) \geq 0 \qquad \text{per ogni } x \in D.$$

Inoltre, dal momento che l'arcotangente si annulla se e solo se il suo argomento è nullo, abbiamo che

$$f(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = -\frac{1}{2}.$$

(3) abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan\left|\frac{2\,x+1}{x+2}\right| = \arctan(2),$$

$$\lim_{x\to-\infty} \arctan\left|\frac{2\,x+1}{x+2}\right| = \arctan(2),$$

$$\lim_{x\to-2} \arctan\left|\frac{2\,x+1}{x+2}\right| = \lim_{t\to+\infty} \arctan(t) = \frac{\pi}{2},$$

La funzione ha quello che si chiama un *asintoto orizzontale*, per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$. Si noti invece che in $x = -2$, non ci sono fenomeni di particolari rilevanza, la funzione ammette un limite finito;

(4) si ricordi che la funzione "valore assoluto" è derivabile per argomenti non nulli. Quindi la nostra funzione non sarà derivabile per $x = -1/2$. Otteniamo allora che

$$D' = D \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\} = \mathbb{R} \setminus \left\{-2, -\frac{1}{2}\right\};$$

(5) utilizziamo il *test di monotonia*, studiamo quindi il segno della derivata prima di f: al fine di calcolare la derivata di f, ci è utile lo studio del segno di $(2\,x+1)/(x+2)$. Si osservi infatti che

$$\frac{2\,x+1}{x+2} \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in (-\infty,-2) \cup \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right).$$

Si ha allora

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{2\,x+1}{x+2}\right), & \text{se } x \in (-\infty,-2) \cup \left(-\dfrac{1}{2}, +\infty\right), \\[2ex] -\arctan\left(\dfrac{2\,x+1}{x+2}\right), & \text{se } x \in \left(-2, -\dfrac{1}{2}\right), \end{cases}$$

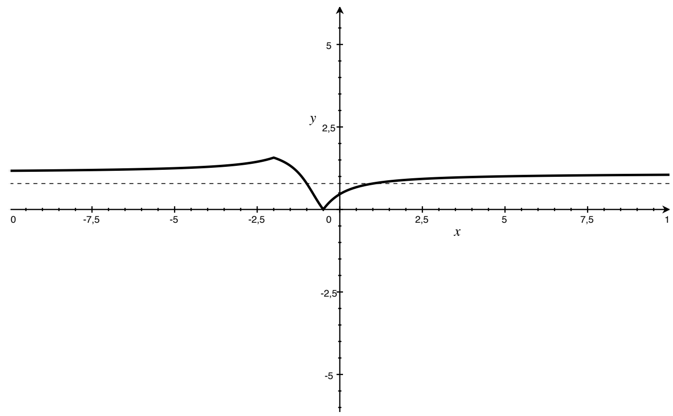

Figura 1. Il grafico della funzione dell'Esercizio 11. Si notino: l'asintoto orizzontale $y = \arctan(2)$; i punti angolosi in corrispondenza del punto di minimo $x = -1/2$ e del punto $x = -2$ (dove la funzione non è definita).

dove abbiamo sfruttato anche che $\arctan(-\alpha) = -\arctan\alpha$, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Abbiamo allora

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{2\,x+1}{x+2}\right)^2} \cdot \begin{cases} \dfrac{3}{(x+2)^2}, & \text{se } x \in (-\infty, -2) \cup \left(-\dfrac{1}{2}, +\infty\right), \\ -\dfrac{3}{(x+2)^2}, & \text{se } x \in \left(-2, -\dfrac{1}{2}\right). \end{cases}$$

Quindi f è monotona crescente su $(-\infty, -2) \cup (-1/2, +\infty)$ e monotona decrescente su $(-2, -1/2)$;

(6) in base allo studio dei punti precedenti, otteniamo che

$$\inf_{x \in D} f(x) = 0 = \min_{x \in D} f(x) = f(-1/2),$$

con $x = -1/2$ unico punto di minimo. Si ha anche

$$\sup_{x \in D} f(x) = \frac{\pi}{2},$$

e la funzione non ammette massimo (la funzione arcotangente non ammette mai il valore $\pi/2$);

(7) si tratta di calcolare i limiti di f' nei punti $x = -2$ e $x = -1/2$. Si vede abbastanza facilmente che

$$\begin{aligned} \lim_{x \to (-2)^-} f'(x) &= \lim_{x \to (-2)^-} \frac{1}{1 + \left(\frac{2\,x+1}{x+2}\right)^2} \, \frac{3}{(x+2)^2} \\ &= \lim_{x \to (-2)^-} \frac{3}{(x+2)^2 + (2\,x+1)^2} = \frac{1}{3}, \\ \lim_{x \to (-2)^+} f'(x) &= -\lim_{x \to (-2)^+} \frac{1}{1 + \left(\frac{2\,x+1}{x+2}\right)^2} \, \frac{3}{(x+2)^2} \\ &= -\lim_{x \to (-2)^+} \frac{3}{(x+2)^2 + (2\,x+1)^2} = -\frac{1}{3}, \\ \lim_{x \to (-\frac{1}{2})^+} f'(x) &= \lim_{x \to (-\frac{1}{2})^+} \frac{1}{1 + \left(\frac{2\,x+1}{x+2}\right)^2} \, \frac{3}{(x+2)^2} = \frac{4}{3}, \end{aligned}$$

e

$$\lim_{x \to (-\frac{1}{2})^-} f'(x) = -\lim_{x \to (-\frac{1}{2})^-} \frac{1}{1 + \left(\frac{2\,x+1}{x+2}\right)^2} \, \frac{3}{(x+2)^2} = -\frac{4}{3},$$

Possiamo adesso tracciare il grafico della funzione in esame. □

Esercizio 12 (7 punti)**.** *Si consideri il campo di Biot-Savart*

$$\mathbf{F}_{BS}(x, y, z) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0\right), \qquad \textit{per } (x, y) \neq 0, \ z \in \mathbb{R}.$$

Si dica se tale campo è conservativo sul suo dominio di definizione, giustificando la risposta. Se ne calcoli poi il flusso attraverso Σ *e* ∂V*, dove*

$$\Sigma = \left\{(x,y,z)\,:\, x^2+y^2+z^2\le 1,\; y\ge \frac{1}{2}\ e\ x=0\right\}\qquad e\quad V=\left\{(x,y,z)\,:\, x^2+y^2+z^2\le 1,\; \sqrt{x^2+y^2}\ge\frac{1}{4}\right\}.$$

Soluzione. Nonostante si tratti di un campo irrotazionale, il campo $\mathbf{F}_{BS}$ **non** è conservativo sul suo dominio di definizione. Abbiamo infatti visto a lezione che il lavoro di $\mathbf{F}_{BS}$ lungo il sostegno del circuito regolare

$$\gamma(t)=(\cos t,\sin t),\qquad \text{con } t\in[0,2\,\pi],$$

non è nullo, dal momento che si ha

$$\int_{\mathrm{Im}(\gamma)}\langle \mathbf{F}_{BS},\mathbf{T}_\gamma\rangle\, d\ell = 2\,\pi.$$

Osserviamo che $\mathbf{F}_{BS}$ è solenoidale, infatti si ha

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{2\,x\,y}{(x^2+y^2)^2},$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2} = -\frac{2\,x\,y}{(x^2+y^2)^2},$$

e

$$\frac{\partial F_3}{\partial z}=0,$$

da cui quindi $\mathrm{div}\mathbf{F}_{BS}=0$, sul proprio dominio di definizione. Osservando che $\mathbf{F}_{BS}$ è di classe C^1 sull'insieme V (si osservi che questo insieme non contiene i punti della forma $(0,0,z)$) e che la frontiera di V è unione di due sostegni di superfici regolari, possiamo applicare il Teorema della Divergenza e concludere che

$$\iint_{\partial V}\langle \mathbf{F}_{BS},\mathbf{N}\rangle\, d\sigma = \iiint_V \mathrm{div}\mathbf{F}_{BS}\, dx\,dy\,dz = 0.$$

Per quanto riguarda il flusso attraverso Σ, osserviamo che quest'ultimo coincide col sostegno della superficie regolare

$$\phi(t,s)=(0,t,s)\qquad \text{con } (t,s)\in\overline{A}=\{(y,z)\,:\,y\ge 1/2, y^2+z^2\le 1\}.$$

Osservando che

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}=(0,1,0)\qquad \text{e}\qquad \frac{\partial\phi}{\partial s}=(0,0,1),$$

si ha allora

$$\iint_\Sigma\langle\mathbf{F}_{BS},\mathbf{N}\rangle\, d\sigma = \iint_{\overline{A}}\left\langle \begin{bmatrix} -\frac{1}{y}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\rangle dy\,dz = -\iint_{\overline{A}}\frac{1}{y}\,dy\,dz.$$

L'ultimo integrale si può fare, pensando ad A come un dominio $y-$semplice nel piano yz: infatti, si può scrivere

$$\overline{A}=\left\{(y,z)\,:\,|z|\le\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\le y\le\sqrt{1-z^2}\right\}.$$

Si ha allora

$$\iint_{\overline{A}}\frac{1}{y}\,dy\,dz = \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{1-z^2}}\frac{1}{y}\,dy\right)dz = \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\log\sqrt{1-z^2}-\log\frac{1}{2}\right)dz$$
$$=\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\log\sqrt{1-z^2}\,dz - \sqrt{3}\,\log\frac{1}{2}.$$

Per concludere, ci manca da trovare una primitiva della funzione $g(z)=\log\sqrt{1-z^2}$: usando le proprietà dei logaritmi ed un'integrazione per parti, si ha per ogni $|z|<1$

$$\begin{aligned}\int\log\sqrt{1-z^2}\,dz\,dz = \int\frac{1}{2}\,\log(1-z^2)\,dz &= \frac{z}{2}\,\log(1-z^2)-\int\frac{z}{2}\cdot\frac{-2\,z}{1-z^2}\,dz\\ &=\frac{z}{2}\,\log(1-z^2)+\int\frac{z^2}{1-z^2}\,dz\\ &=\frac{z}{2}\,\log(1-z^2)+\int\frac{z^2-1}{1-z^2}\,dz+\int\frac{1}{1-z^2}\,dz\\ &=\frac{z}{2}\,\log(1-z^2)-z+\frac{1}{2}\int\left[\frac{1}{1-z}+\frac{1}{1+z}\right]dz\\ &=\frac{z}{2}\,\log(1-z^2)-z+\frac{1}{2}\Big[-\log(1-z)+\log(1+z)\Big].\end{aligned}$$

Usando questa primitiva, si conclude. □