

Nome, Cognome

Matricola

ANALISI MATEMATICA
– PROVA SCRITTA –

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA – A.A. 2018/2019

Libri, appunti e calcolatrici non ammessi

PRIMA PARTE

- Lo studente scriva solo la risposta, direttamente su questo foglio.
- La seconda parte verrà corretta **esclusivamente** nel caso che lo studente risponda correttamente ad almeno 5 domande su 10 della prima parte.
- Ogni esercizio vale 2 punti, in caso di risposta corretta.

Esercizio 1. Si calcoli il limite seguente

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x} \left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x}} - 1 \right) = \frac{1}{3}$$

Esercizio 2. Si dica quali tra i seguenti sono punti di minimo locale per la funzione $f(x, y) = x^3 - y^3 + xy$

$$(0, 0) \quad (1, -1) \quad \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3} \right) \quad (0, 1)$$

Esercizio 3. Si trovi una primitiva F della funzione $f(x) = x e^x$

$$F(x) = (x - 1) e^x$$

Esercizio 4. Si trovi la curvatura κ_γ della curva $\gamma(t) = (\cos^4 t, \sin^4 t)$ con $t \in (0, \pi/2)$

$$\kappa_\gamma(t) = -\frac{1}{2} \frac{1}{(\cos^4 t + \sin^4 t)^{\frac{3}{2}}}$$

Esercizio 5. Si trovi il baricentro (\bar{x}, \bar{y}) del sostegno della curva $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ con $t \in [\pi/6, \pi/3]$

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{6}{\pi} \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2}, \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \right)$$

Esercizio 6. Sia $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, si determinino

$$\min_{(x,y) \in E} (x + y) = -\sqrt{2} \quad \max_{(x,y) \in E} (x + y) = \sqrt{2}$$

Esercizio 7. Si dica quali tra le seguenti serie risultano convergenti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n}{n^3 + 1}\right)$$

Esercizio 8. Si calcoli il lavoro del campo di Biot-Savart $\mathbf{F}_{BS}(x, y, z) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right)$ lungo l'elica cilindrica $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ con $t \in [0, \pi/2]$

$$\int_{\text{Im}(\gamma)} \langle \mathbf{F}, \mathbf{T}_\gamma \rangle dl = \frac{\pi}{2}$$

Esercizio 9. Si dia lo sviluppo di Taylor all'ordine 3 centrato in $x_0 = 0$ con resto di Peano della funzione

$$f(x) = \sin(x + x^3) = x + \frac{5}{6} x^3 + o(x^3)$$

Esercizio 10. Si scriva l'equazione del piano tangente al grafico di $f(x, y) = e^x \log y$ nel punto $(1, 2, e \log 2)$

$$z = e \log 2 + e \log 2 (x - 1) + \frac{e}{2} (y - 2)$$

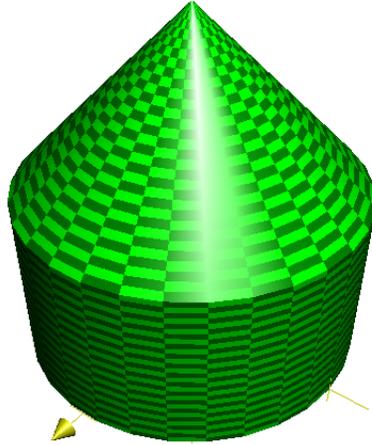


FIGURE 1. L'insieme E dell'Esercizio 11.

SECONDA PARTE

Lo studente scriva lo svolgimento di ogni esercizio su un foglio a parte.

*In questa parte **non** verranno ritenute valide risposte corrette, ma prive di giustificazione.*

Esercizio 11 (7 punti). Si calcoli il momento di inerzia rispetto all'asse delle z dell'insieme

$$E = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 2 - \sqrt{x^2 + y^2}\}.$$

Soluzione. Dato $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, la distanza dall'asse delle z è data dalla quantità $\sqrt{x^2 + y^2}$. Dobbiamo quindi calcolare l'integrale triplo

$$I = \iiint_E (x^2 + y^2) dx dy dz.$$

Osserviamo che E è z -semplice, dal Teorema di Fubini abbiamo allora

$$I = \iint_B (x^2 + y^2) dx dy dz = \iint_B \left(\int_0^{2 - \sqrt{x^2 + y^2}} dz \right) dx dy,$$

dove abbiamo posto $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Otteniamo quindi

$$\begin{aligned} I &= \iiint_E (x^2 + y^2) dx dy dz = \iint_B \left(\int_0^{2 - \sqrt{x^2 + y^2}} dz \right) (x^2 + y^2) dx dy \\ &= \iint_B (2 - \sqrt{x^2 + y^2}) (x^2 + y^2) dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (2 - \varrho) \varrho^2 d\varrho d\vartheta, \end{aligned}$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato le coordinate polari nel piano. Si vede facilmente adesso che

$$I = 2\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) = \frac{3}{5}\pi,$$

concludendo così l'esercizio. □

Esercizio 12 (8 punti). Sia $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale dato da

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x, -z, y).$$

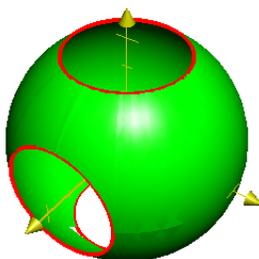


FIGURE 2. La superficie S dell'Esercizio 12. In rosso, sono evidenziate le 3 curve che costituiscono il bordo di S , lungo cui calcoliamo il lavoro di \mathbf{F} , una volta che si applichi il Teorema di Stokes. Attenzione all'orientazione di queste 3 curve!

Consideriamo i due sottoinsiemi di \mathbb{R}^3

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, |z| \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \right\} \setminus \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \right\},$$

e

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\} \setminus \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4} \right\}.$$

Si calcoli:

- il flusso di \mathbf{F} attraverso ∂V ;
- il flusso di $\text{rot } \mathbf{F}$ attraverso S .

Si dica infine se i campi \mathbf{F} e $\text{rot } \mathbf{F}$ sono conservativi, giustificando la risposta.

Soluzione. Per calcolare il flusso di \mathbf{F} attraverso ∂V , possiamo usare il Teorema della Divergenza, ovvero

$$\iint_{\partial V} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N}_{\partial V} \rangle d\sigma = \iiint_V \text{div } \mathbf{F} dx dy dz = \iiint_V dx dy dz,$$

grazie al fatto che la divergenza di \mathbf{F} vale costantemente 1. Si osservi adesso che l'insieme V coincide con la palla di raggio 1 e centro $(0, 0, 0)$, da cui è stato rimosso un cilindro con asse di simmetria coincidente con l'asse z , avente sezione di raggio $1/2$. In coordinate cilindriche, l'insieme V si può descrivere tramite

$$x = \varrho \cos \vartheta, \quad y = \varrho \sin \vartheta, \quad z = z,$$

con

$$z \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right], \quad \vartheta \in [0, 2, \pi] \quad \text{e} \quad \frac{1}{2} \leq \varrho \leq \sqrt{1 - z^2}.$$

Otteniamo quindi

$$\begin{aligned} \iint_{\partial V} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N}_{\partial V} \rangle d\sigma &= \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{1-z^2}} \varrho d\varrho \right) dz d\vartheta \\ &= 2\pi \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left[\frac{1-z^2}{2} - \frac{1}{8} \right] dz \\ &= 4\pi \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left[\frac{1-z^2}{2} - \frac{1}{8} \right] dz. \end{aligned}$$

L'ultimo integrale si calcola facilmente.

Veniamo adesso al flusso di $\text{rot } \mathbf{F}$ attraverso S . Si osservi che S coincide con la sfera di raggio 1 e centro $(0, 0, 0)$, a cui sono stati praticati 3 fori di raggio $1/2$: due centrati sull'asse z (in modo simmetrico rispetto all'origine) ed uno centrato sull'asse x , si veda la figura. Possiamo usare il Teorema di Stokes ed ottenere

$$\iint_S \langle \text{rot } \mathbf{F}, \mathbf{N}_S \rangle d\sigma = \int_{\partial^+ S} \langle \mathbf{F}, \mathbf{T} \rangle d\ell.$$

Ricordiamo che $\partial^+ S$ è il bordo di S , orientato positivamente in accordo con la scelta della normale \mathbf{N}_S . Il bordo di S è costituito da 3 circonferenze, al fine di parametrizzarle in modo corretto, scegliamo innanzitutto un'orientazione per \mathbf{N}_S : prendiamo per esempio la normale “uscende” rispetto alla sfera.

Otteniamo quindi che la “circonferenza superiore” va percorsa in senso orario, ad esempio possiamo prendere

$$\gamma_1(t) = \left(\frac{1}{2} \cos t, -\frac{1}{2} \sin t, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \quad t \in [0, 2\pi],$$

la “circonferenza inferiore” va percorsa in senso antiorario

$$\gamma_2(t) = \left(\frac{1}{2} \cos t, \frac{1}{2} \sin t, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right), \quad t \in [0, 2\pi],$$

ed infine la “circonferenza verticale” va percorsa in senso orario attorno all'asse x , ovvero

$$\gamma_3(t) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \cos t, -\frac{1}{2} \sin t \right), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Usando queste parametrizzazioni, otteniamo quindi

$$\begin{aligned} \iint_S \langle \text{rot } \mathbf{F}, \mathbf{N}_S \rangle d\sigma &= \int_{\partial^+ S} \langle \mathbf{F}, \mathbf{T} \rangle d\ell = \sum_{i=1}^3 \int_0^{2\pi} \langle \mathbf{F}(\gamma_i(t)), \gamma_i'(t) \rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{bmatrix} 1/2 \cos t \\ -\sqrt{3}/2 \\ -1/2 \sin t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/2 \sin t \\ -1/2 \cos t \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle dt \\ &+ \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{bmatrix} 1/2 \cos t \\ \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \sin t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/2 \sin t \\ 1/2 \cos t \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle dt \\ &+ \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \sin t \\ 1/2 \cos t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1/2 \sin t \\ -1/2 \cos t \end{bmatrix} \right\rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{4} \cos t \sin t + \frac{\sqrt{3}}{4} \cos t \right] dt \\ &+ \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{4} \cos t \sin t + \frac{\sqrt{3}}{4} \cos t \right] dt \\ &- \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} [\sin^2 t + \cos^2 t] dt = -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Questo conclude l'esercizio. □