Nome, Cognome ....

Matricola ....

ANALISI MATEMATICA
– PROVA SCRITTA –

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA – A.A. 2017/2018

Libri, appunti e calcolatrici non ammessi

PRIMA PARTE

- Lo studente scriva solo la risposta, direttamente su questo foglio.

- La seconda parte verrà corretta **esclusivamente** *nel caso in cui lo studente risponda correttamente ad almeno 5 domande su 10 della prima parte.*

- Ogni esercizio vale 2 punti, in caso di risposta corretta.

Esercizio 1. *Si dica per quali valori di $\vartheta > 0$ il campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z) = (y\,z, x\,z, x\,y^{\vartheta})$ è conservativo su $\mathbb{R}^3$*

$$\vartheta = 1$$

Esercizio 2. *Sia $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3\,x\,y$. Si dica quali tra i seguenti sono punti di minimo locale per f*

$$(1, 1), \qquad (0, 1), \qquad (0, 0)\,, \qquad (1, 0), \qquad (-1, -1)$$

Esercizio 3. *Siano $E = \{(x, y \in \mathbb{R}^2\ :\ 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$ e $f(x, y) = x\,y$, si determinino*

$$\max_E f = 2 \qquad e \qquad \min_E f = -2$$

Esercizio 4. *Si calcoli la lunghezza ℓ della curva $\gamma(t) = (t^2, t^3/3)$, dove $t \in [0, 1]$*

$$\ell = \frac{5^{\frac{3}{2}} - 8}{3}$$

Esercizio 5. *Si calcoli il limite seguente*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - 2\,\cos x + \sqrt{1 - 2\,x}}{\sqrt[3]{1 + x^2} - 1} = 3$$

Esercizio 6. *Si dica quali dei seguenti potenziali generano un campo vettoriale a divergenza nulla*

$$x^3 + 3\,x\,y^2 \qquad x^3 - 3\,x\,y^2 \qquad \sin x\,\sinh y \qquad \frac{y}{x}$$

Esercizio 7. *Si calcoli il lavoro del campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$ lungo la curva regolare* **orientata positivamente** *γ il cui sostegno è l'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ :\ (x - 2)^2 + y^2 = 1\}$*

$$\int_{\mathrm{Im}(\gamma)} \langle \mathbf{F}, \mathbf{T}_\gamma \rangle\, d\ell = 2\,\pi$$

Esercizio 8. *Si dica per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie seguente è convergente*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) - \frac{1}{n^\alpha} \right)^2 \qquad \alpha > \frac{1}{6}$$

Esercizio 9. *Si dica quali tra le serie seguenti sono convergenti*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n^2\,\log n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right] \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \sqrt[n]{n}}$$

Esercizio 10. *Trovare una primitiva F della funzione $x \mapsto \sqrt[3]{(2 + x)^4}$*

$$F(x) = \frac{3}{7}\,(2 + x)^{\frac{7}{3}}$$

Seconda parte

Lo studente scriva lo svolgimento di ogni esercizio su un foglio a parte.

In questa parte **non** *verranno ritenute valide risposte corrette, ma prive di giustificazione.*

Esercizio 11 (7 punti)**.** *Sia $\alpha > 0$, si consideri l'insieme seguente*

$$E_\alpha = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + \frac{y^2}{\alpha^2} \leq 1\right\}.$$

(1) *per un $T > 0$ opportuno, si dia una curva regolare $\gamma : [0, T] \to \mathbb{R}^2$ il cui sostegno coincida con ∂E_α;*

(2) *si calcoli $\kappa_\gamma : [0, T] \to \mathbb{R}$ la curvatura di γ;*

(3) *si calcoli l'integrale*

$$\int_0^T \kappa_\gamma(t)^{-\frac{4}{3}} \, dt$$

(4) *si dimostri che l'integrale precedente tende a $+\infty$ quando α tende a 0^+ oppure a $+\infty$. Come è fatto l'insieme E_α in questi due casi limite?*

Soluzione. Procediamo per punti:

(1) l'insieme E è un'ellisse centrata nell'origine, aventi semiassi di lunghezza 1 e α. Possiamo quindi prendere $T = 2\pi$ e

$$\gamma(t) = (\cos t, \alpha \sin t), \qquad t \in [0, 2\pi];$$

(2) usando la formula per il calcolo della curvatura di una curva piana, si trova

$$\kappa_\gamma(t) = \frac{\alpha}{(\sin^2 t + \alpha^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}, \qquad t \in [0, 2\pi];$$

(3) in base al calcolo precedente, si ha

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \kappa_\gamma(t)^{-\frac{4}{3}} \, dt &= \alpha^{-\frac{4}{3}} \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \alpha^2 \cos^2 t)^2 \, dt \\ &= \alpha^{-\frac{4}{3}} \int_0^{2\pi} \left[\sin^4 t + 2\alpha^2 \sin^2 t \cos^2 t + \alpha^4 \cos^4 t\right] dt.\end{aligned}$$

Spezziamo l'ultimo integrale in tre integrali e calcoliamo ognuno separatamente: usando due volte la formula di bisezione, si ha

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \sin^4 t \, dt = \int_0^{2\pi} \left(\sin^2 t\right)^2 \, dt &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 - \cos(2t)}{2}\right)^2 dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1 - 2\cos(2t) + \cos^2(2t)}{4} \, dt \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} dt - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos(2t) \, dt + \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(4t)}{2} \, dt \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi.\end{aligned}$$

Analogamente, ottiene

$$\int_0^{2\pi} \cos^4 t \, dt = \frac{3}{4}\pi.$$

Infine, usando che $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, si ha

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t \, dt = \int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt - \int_0^{2\pi} \sin^4 t \, dt = \pi - \frac{3}{4}\pi = \frac{\pi}{4}.$$

Abbiamo quindi ottenuto

$$\int_0^{2\pi} \kappa_\gamma(t)^{-\frac{4}{3}} \, dt = \frac{\pi}{4} \alpha^{-\frac{4}{3}} \left[3 + 2\alpha^2 + 3\alpha^4\right];$$

(4) una volta ottenuta l'espressione esplicita dell'integrale precedente, è immediato verificare l'asserto: infatti, si ha

$$\alpha^{-\frac{4}{3}} \left[3 + 2\alpha^2 + 3\alpha^4\right] \sim \frac{3}{\alpha^{\frac{4}{3}}} \qquad \text{se } \alpha \to 0^+,$$

e

$$\alpha^{-\frac{4}{3}} \left[3 + 2\alpha^2 + 3\alpha^4\right] \sim 3\alpha^{4-\frac{4}{3}} \qquad \text{se } \alpha \to +\infty.$$

□

Esercizio 12 (9 punti). *Sia* $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *il campo vettoriale dato da*

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \big(-y, x, z^2 + 1\big) .$$

Consideriamo i due sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$

$$S = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2 + y^2 \le 1, \, z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}\Big\},$$

e

$$V = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2 + y^2 \le 1, \, 0 \le z \le \sqrt{1 + x^2 + y^2}\Big\} .$$

Si calcoli:

- *il flusso di* $\operatorname{rot} \mathbf{F}$ *attraverso* S*;*
- *i flussi di* $\mathbf{F}$ *e di* $\operatorname{rot} \mathbf{F}$ *attraverso* ∂V*.*

Soluzione. Procediamo per punti:

- si osservi che S è una superficie (cartesiana, i.e. il suo sostegno è il grafico di una funzione delle variabili (x, y)) con bordo. Scegliamo l'orientazione della normale $\mathbf{N}_S$: orientiamola per esempio in modo uscente "verso il basso", usando il Teorema di Stokes si ha

(1) $$\iint_S \langle \operatorname{rot} \mathbf{F}, \mathbf{N}_S\rangle \, d\sigma = \int_{\partial_+ S} \langle \mathbf{F}, \mathbf{T}\rangle \, d\ell,$$

  dove $\partial_+ S$ è il bordo di S, orientato positivamente rispetto a $\mathbf{N}_S$. Questo vuol dire che $\partial_+ S$ corrisponde al cerchio

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2 + y^2 = 1 \quad \text{e} \quad z = \sqrt{2}\},$$

  percorso **in senso orario**. Possiamo parametrizzare questo insieme prendendo

$$\gamma(t) = (\cos(2\,\pi - t), \sin(2\,\pi - t), \sqrt{2}), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

  Dalla formula (1) abbiamo quindi

$$\begin{aligned}\iint_S \langle \operatorname{rot} \mathbf{F}, \mathbf{N}_S\rangle \, d\sigma &= \int_{\partial_+ S} \langle \mathbf{F}, \mathbf{T}\rangle \, d\ell \\ &= \int_0^{2\,\pi} \langle \mathbf{F}(\gamma(t)), (-\sin(2\,\pi - t), \cos(2\,\pi - t), 0)\rangle \, dt \\ &= \int_0^{2\,\pi} [\sin^2(2\,\pi - t) + \cos^2(2\,\pi - t)] \, dt = 2\,\pi;\end{aligned}$$

- calcoliamo adesso i flussi richiesti attraverso la superficie senza bordo ∂V. Useremo il Teorema della Divergenza in entrambi i casi. Osserviamo subito che (visto a lezione)

$$\operatorname{div} (\operatorname{rot} \mathbf{F}) = 0,$$

  quindi

$$\iint_{\partial V} \langle \operatorname{rot} \mathbf{F}, \mathbf{N}_{\partial V}\rangle \, d\sigma = 0.$$

  Infine, calcoliamo il flusso di $\mathbf{F}$: si ha

$$\begin{aligned}\iint_{\partial V} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N}_{\partial V}\rangle \, d\sigma &= \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx \, dy \, dz \\ &= 2 \iiint_V z \, dx \, dy \, dz.\end{aligned}$$

  Per calcolare l'ultimo integrale, osserviamo che il dominio V è $z-$semplice per definizione. Si ha quindi

$$\begin{aligned}2 \iiint_V z \, dx \, dy \, dz &= 2 \iint_{\{(x,y)\,:\,x^2+y^2\le 1\}} \left(\int_0^{\sqrt{1+x^2+y^2}} z \, dz\right) dx \, dy \\ &= \iint_{\{(x,y)\,:\,x^2+y^2\le 1\}} \Big[z^2\Big]_0^{\sqrt{1+x^2+y^2}} dx \, dy \\ &= \iint_{\{(x,y)\,:\,x^2+y^2\le 1\}} [1 + x^2 + y^2] \, dx \, dy \\ &= \int_0^{2\,\pi} \int_0^1 [1 + \varrho^2] \, \varrho \, d\varrho \, d\vartheta = 2\,\pi \left[\frac{\varrho^2}{2} + \frac{\varrho^4}{4}\right]_0^1 = \frac{3}{2}\,\pi.\end{aligned}$$

  Nel calcolo dell'integrale doppio in (x, y) abbiamo usato le coordinate polari.

□