Nome, Cognome ....

Matricola ....

ANALISI MATEMATICA B
– PROVA SCRITTA –

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA – A.A. 2017/2018

Libri, appunti e calcolatrici non ammessi

PRIMA PARTE

- Lo studente scriva solo la risposta, direttamente su questo foglio.

- La seconda parte verrà corretta **esclusivamente** *nel caso che lo studente risponda correttamente ad almeno 5 domande su 10 della prima parte.*

- Ogni esercizio vale 2 punti, in caso di risposta corretta.

Esercizio 1. *Trovare il potenziale U del campo vettoriale conservativo* $\mathbf{F}(x,y) = (e^x(\sin y - \cos y), e^x(\cos y + \sin y))$

$$U(x,y) = e^x(\sin y - \cos y)$$

Esercizio 2. *Sia $f(x,y) = x^3 + y^3 + x\,y$. Si dica quali tra i seguenti sono punti di massimo locale per f*

$$(0,0), \qquad (0,-1), \qquad \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right), \qquad (-1,-1)$$

Esercizio 3. *Trovare l'insieme dei punti critici C della funzione* $f(x,y) = e^{x-y} - x + y$

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x = y\}$$

Esercizio 4. *Sia* $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ x \ge 0\}$, *si calcoli il suo baricentro* $(\overline{x}, \overline{y})$

$$(\overline{x}, \overline{y}) = \left(\frac{28}{9\,\pi}, 0\right)$$

Esercizio 5. *Si calcoli la lunghezza ℓ della curva* $\gamma(t) = (2\sinh t, \cosh^2 t)$ *con* $t \in [0,1]$

$$\ell = \frac{\sinh 2}{2} + 1$$

Esercizio 6. *Si consideri la superficie regolare* $\phi(t,s) = (2\cos t, \sqrt{3}\sin t, s)$. *Si dia il versore normale al sostegno di ϕ nel punto di coordinate* $(2,0,1)$

$$\mathbf{N}_\phi = (1,0,0)$$

Esercizio 7. *Si calcoli il lavoro del campo vettoriale* $\mathbf{F}(x,y,z) = (0, \cosh y \sin z, \sinh y \cos z)$ *lungo l'elica cilindrica* $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ *con* $t \in [0, \pi/2]$

$$\int_{\mathrm{Im}(\gamma)} \langle \mathbf{F}, \mathbf{T}_\gamma \rangle \, d\ell = \sinh 1$$

Esercizio 8. *Siano* $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^4 + y^4 \le 1\}$ *e* $f(x,y) = x^2 + y^2$, *si determinino*

$$\max_E f = \sqrt{2} \qquad\qquad \min_E f = 0$$

Esercizio 9. *Si scriva l'equazione del piano tangente alla sfera di centro $(0,0,0)$ e raggio 1, nel punto* $(\sqrt{6}/4, \sqrt{2}/4, \sqrt{2}/2)$

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\sqrt{6}}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(y - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

Esercizio 10. *Data la direzione* $\omega = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) \in \mathbb{R}^2$ *e la funzione* $f(x,y) = e^y \cosh x$, *si calcoli*

$$\frac{\partial f}{\partial \omega}(1,-1) = \frac{1}{e\sqrt{2}}(\sinh 1 - \cosh 1) = -\frac{1}{e^2\sqrt{2}}$$

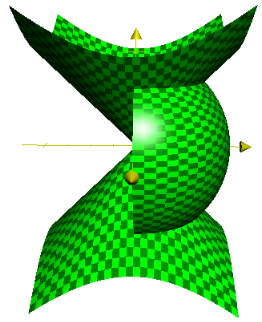

FIGURE 1. L'insieme C è ottenuto rimuovendo dalla mezza palla ciò che si trova sopra e sotto, rispettivamente, ai due coni in figura.

FIGURE 2

SECONDA PARTE

Lo studente scriva lo svolgimento di ogni esercizio su un foglio a parte.

In questa parte **non** *verranno ritenute valide risposte corrette, ma prive di giustificazione.*

Esercizio 11 (7 punti)**.** *Calcolare il momento di inerzia rispetto all'asse z dell'insieme*

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\, y \geq 0 \text{ e } z^2 \leq x^2 + y^2\}.$$

Proof. Ricordando la definizione di momento di inerzia, dobbiamo calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_C (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz.$$

Si osservi che C può essere descritto facilmente usando le coordinate sferiche

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos\vartheta \sin\varphi \\ y &= \varrho \sin\vartheta \sin\varphi \\ z &= \varrho \cos\varphi \end{aligned}$$

dove

$$0 \leq \varrho \leq 1, \qquad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \qquad \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3}{4}\pi.$$

Si ottiene quindi

$$\begin{aligned} \iiint_C (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz &= \int_0^{\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \int_0^1 \varrho^2 \sin^2\varphi\, \varrho^2 \sin\varphi\, d\varrho\, d\vartheta\, d\varphi \\ &= \pi \left(\int_0^1 \varrho^4\, d\varrho \right) \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \sin^3\varphi\, d\varphi \right) \\ &= \frac{\pi}{5} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} (1 - \cos^2\varphi) \sin\varphi\, d\varphi \\ &= \frac{\pi}{5} \left[-\cos\varphi + \frac{\cos^3\varphi}{3} \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \\ &= \frac{\pi}{5} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{3}\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{3}\frac{\sqrt{2}}{4} \right] \\ &= \frac{\pi\sqrt{2}}{6}. \end{aligned}$$

□

Esercizio 12 (9 punti)**.** *Sia* $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *il campo vettoriale dato da*

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(-\frac{y}{2}, \frac{x}{2}, z \right).$$

Consideriamo i due sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z = 4\,x^2 + 4\,y^2,\, 1 \leq z \leq 2\},$$

e

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 \leq z \leq 4\,(x^2 + y^2),\, 1 \leq z \leq 2\}.$$

Si calcoli:

- *il flusso di* $\mathbf{F}$ *attraverso* ∂V*;*
- *il flusso di* $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ *attraverso* S*.*

Proof. Si osservi che ∂V è superficie chiusa, possiamo quindi usare il Teorema della Divergenza per calcolare il flusso **uscente** da V. Si ha

$$\iint_{\partial V} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N} \rangle \, d\sigma(x, y, z) = \iiint_V \operatorname{div}\mathbf{F}(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$
$$= \iint_V dx\, dy\, dz,$$

ovvero il flusso uscente da V è uguale al volume dell'insieme V. Usiamo le coordinate cilindriche per calcolare l'ultimo integrale: si ha

$$\iint_V dx\, dy\, dz = \int_1^2 \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\sqrt{z}}{2}}^{\sqrt{z}} \varrho\, d\varrho\, d\vartheta\, dz = 2\,\pi \int_1^2 \left[\frac{\varrho^2}{2}\right]_{\frac{\sqrt{z}}{2}}^{\sqrt{z}} dz = \frac{3}{4}\,\pi \int_1^2 z\, dz = \frac{9}{8}\,\pi.$$

Per calcolare il flusso del rotore di $\mathbf{F}$ attraverso S, osserviamo che quest'ultima superficie ha bordo. Possiamo usare allora il Teorema di Stokes

$$\iint_S \langle \operatorname{rot}\mathbf{F}, \mathbf{N} \rangle \, d\sigma(x, y, z) = \int_{\partial^+ S} \langle \mathbf{F}, \mathbf{T} \rangle \, d\ell,$$

dove $\partial^+ S$ rappresenta il bordo di S, orientato positivamente rispetto alla normale $\mathbf{N}$. Scegliamo per esempio la normale **uscente**, allora $\partial^+ S$ è composto da due circonferenze, una percorsa in senso orario e l'altra percorsa in senso antiorario. Possiamo parametrizzarle tramite

$$\gamma_1(t) = \left(\frac{1}{2}\cos t, \frac{1}{2}\sin t, 1\right), \qquad t \in [0, 2\,\pi]$$

e

$$\gamma_2(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(2\,\pi - t), \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(2\,\pi - t), 2\right), \qquad t \in [0, 2\,\pi].$$

Abbiamo quindi

$$\int_{\partial^+ S} \langle \mathbf{F}, \mathbf{T} \rangle \, d\ell = \int_0^{2\pi} \langle \mathbf{F}(\gamma_1(t)), \gamma_1'(t) \rangle \, dt + \int_0^{2\pi} \langle \mathbf{F}(\gamma_2(t)), \gamma_2'(t) \rangle \, dt$$
$$= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{bmatrix} -(\sin t)/4 \\ (\cos t)/4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -(\sin t)/2 \\ (\cos t)/2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle dt$$
$$+ \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{bmatrix} -(\sin(2\,\pi - t))/(2\sqrt{2}) \\ (\cos(2\,\pi - t))/(2\sqrt{2}) \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (\sin(2\,\pi - t))/\sqrt{2} \\ -(\cos(2\,\pi - t))/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle dt$$
$$= \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{8}\, dt - \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(2\,\pi - t) + \cos^2(2\,\pi - t)}{4}\, dt$$
$$= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}.$$

In alternativa, si sarebbe anche potuto calcolare direttamente il flusso del rotore usando la definizione. Infatti, si osservi che

$$\operatorname{rot}\mathbf{F}(x, y, z) = (0, 0, 1).$$

La superficie S è data come grafico della funzione di due variabili

$$f(x, y) = 4\,x^2 + 4\,y^2, \qquad \text{con } (x, y) \in B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}\right\},$$

ovvero S è una superficie cartesiana. Di conseguenza, si ha

$$\iint_S \langle \operatorname{rot}\mathbf{F}, \mathbf{N} \rangle \, d\sigma(x, y, z) = \iint_B \left\langle \operatorname{rot}\mathbf{F}(x, y, f(x, y)), \begin{bmatrix} -\dfrac{\partial f}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial f}{\partial y} \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle dx\, dy = \iint_B dx\, dy,$$

ovvero il flusso coincide con l'area dell'anello B. Tale area è data da

$$\pi \frac{1}{2} - \pi \frac{1}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Si osservi che abbiamo ottenuto lo stesso risultato di prima, ma col segno sbagliato: questo è dovuto al fatto che nel secondo metodo abbiamo orientato la normale $\mathbf{N}$ in modo opposto. Quindi i due metodi conducono effettivamente allo stesso risultato. $\square$