Nome, Cognome ....

Matricola ....

ANALISI MATEMATICA B
– PROVA SCRITTA –

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA – A.A. 2018/2019

`Libri, appunti e calcolatrici` **non ammessi**

PRIMA PARTE

- Lo studente scriva solo la risposta, direttamente su questo foglio.

- La seconda parte verrà corretta **esclusivamente** *nel caso che lo studente risponda correttamente ad almeno 5 domande su 10 della prima parte.*

- Ogni esercizio vale 2 punti, in caso di risposta corretta.

Esercizio 1. *Si indichi quali tra i seguenti potenziali generano un campo vettoriale solenoidale*

$$U(x,y)=\arctan\frac{x}{y},\qquad U(x,y)=x^2-y^2,\qquad U(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2},\qquad U(x,y)=x^2+y^2$$

Esercizio 2. *Si dica quali tra i seguenti sono punti sella per la funzione* $f(x,y)=x^3+3\,x^2\,y+3\,x\,y$

$$(0,0)\qquad(1,-1)\qquad\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)\qquad(-2,2)\qquad\left(\sqrt{\frac{3}{2}},-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$$

Esercizio 3. *Si trovi un potenziale* U *del campo vettoriale* $\mathbf{F}(x,y,z)=(x,-y,z)$

$$U(x,y,z)=\frac{x^2-y^2+z^2}{2}$$

Esercizio 4. *Si trovi la lunghezza della curva* $\gamma(t)=(t-\sin t,1-\cos t)$ *con* $t\in[0,\pi]$

$$\ell(\gamma)=4$$

Esercizio 5. *Si trovi il baricentro* $(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$ *del sostegno della superficie* $\phi(t,s)=(\cos t,\sin t,s)$ *con* $t\in[0,\pi/4]$, $s\in[0,1]$

$$(\overline{x},\overline{y},\overline{z})=\left(\frac{4}{\pi}\,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{4}{\pi}\,\frac{2-\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)$$

Esercizio 6. *Sia* $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,2\,x^2+y^2\le 1\}$, *si determinino*

$$\min_{(x,y)\in E}(x-y)=3/\sqrt{6}\qquad\qquad \max_{(x,y)\in E}(x-y)=-3/\sqrt{6}$$

Esercizio 7. *Data la direzione* $\omega=(1/2,-\sqrt{3}/2)$ *e la funzione* $f(x,y)=\arctan(x+y)$, *si calcoli la derivata di* f *rispetto alla direzione* ω *nel punto* $(0,1)$

$$\frac{\partial f}{\partial\omega}(0,1)=(1-\sqrt{3})/4$$

Esercizio 8. *Sia* $U_{LJ}(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^{-1}-(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$. *Si calcoli il lavoro del* campo di Lennard-Jones $\mathbf{F}_{LJ}(x,y,z)=\nabla U_{LJ}(x,y,z)$ *lungo la curva* $\gamma(t)=(\cos t,\sin t,t)$ *con* $t\in[0,\pi/2]$

$$\int_{\mathrm{Im}(\gamma)}\langle\mathbf{F},\mathbf{T}_\gamma\rangle\,d\ell=U_{LJ}(0,1,\pi/2)-U_{LJ}(1,0,0)=\left(1+\pi^2/4\right)^{-1}-\left(1+\pi^2/4\right)^{-1/2}$$

Esercizio 9. *Si dica per quali* $\alpha\ge 0$ *il seguente limite risulta corretto*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x\,y^2}{(x^2+y^2)^\alpha}=0\qquad 0\le\alpha<\frac{3}{2}$$

Esercizio 10. *Si scriva l'equazione del piano tangente al grafico di* $f(x,y)=\arctan(x+y)$ *nel punto* $(1/2,1/2,\pi/4)$

$$z=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\,(x-1/2)+\frac{1}{2}\,(y-1/2)$$

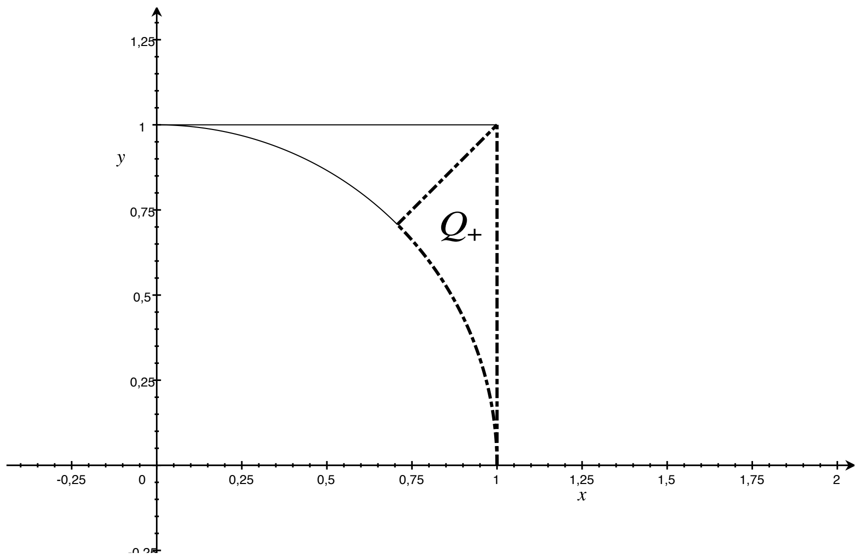

FIGURE 1. L'insieme di integrazione dell'Esercizio 11.

SECONDA PARTE

Lo studente scriva lo svolgimento di ogni esercizio su un foglio a parte.

In questa parte **non** *verranno ritenute valide risposte corrette, ma prive di giustificazione.*

Esercizio 11 (7 punti)**.** *Consideriamo l'insieme*

$$Q = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \geq 1,\, 0 \leq x \leq 1,\, 0 \leq y \leq 1\Big\}.$$

Si calcoli l'integrale doppio

$$\iint_Q \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dx\, dy.$$

Soluzione. Osserviamo innanzitutto che l'insieme Q è simmetrico rispetto all'asse $y = x$. La funzione che dobbiamo intregrare ha lo stesso tipo di simmetria, ovvero il suo grafico è simmetrico rispetto al piano $x = y$. Quindi, se indichiamo con

$$Q_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \geq 1,\, 0 \leq x \leq 1,\, 0 \leq y \leq x\},$$

si veda la Figura 1, si ha

$$\iint_Q \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dx\, dy = 2 \iint_{Q_+} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dx\, dy.$$

Usiamo adesso le coordinate polari

$$x = \varrho \cos\vartheta, \qquad y = \varrho \sin\vartheta,$$

dove $\vartheta \in [0, \pi/4]$ e $1 \leq \varrho \leq 1/\cos\vartheta$. Otteniamo quindi

$$\begin{aligned}\iint_Q \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dx\, dy = 2 \iint_{Q_+} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dx\, dy &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_1^{\frac{1}{\cos\vartheta}} \frac{1}{\varrho}\, \varrho\, d\varrho\, d\vartheta \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos\vartheta}\, d\vartheta - \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Per calcolare l'ultimo integrale, possiamo usare il cambio di variabile

$$\vartheta = 2 \arctan t, \qquad \text{con } t \in \left[0, \tan\frac{\pi}{8}\right],$$

ed ottenere

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos\vartheta}\, d\vartheta &= \int_0^{\tan\frac{\pi}{8}} \frac{1 + t^2}{1 - t^2}\, \frac{2}{1 + t^2}\, dt \\ &= 2 \int_0^{\tan\frac{\pi}{8}} \frac{dt}{1 - t^2} \\ &= \int_0^{\tan\frac{\pi}{8}} \left[\frac{1}{1 - t} + \frac{1}{1 + t}\right] dt = \left[\log\frac{1 + t}{1 - t}\right]_0^{\tan\frac{\pi}{8}} = \log\frac{1 + \tan\frac{\pi}{8}}{1 - \tan\frac{\pi}{8}}.\end{aligned}$$

Questo conclude l'esercizio. □

Esercizio 12 (8 punti)**.** *Sia* $\mathbf{F}_{LJ} : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}^3$ *il campo vettoriale dell'Esercizio 8 (vedi sopra). Consideriamo il sottoinsieme* V *di* $\mathbb{R}^3$*, definito da*

$$V = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4\Big\} \setminus \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, |z| \le \sqrt{x^2+y^2}\Big\}.$$

Si calcoli il flusso di $\mathbf{F}_{LJ}$ *attraverso* ∂V*.*

Soluzione. Il flusso di $\mathbf{F}_{LJ}$ è definito come

$$\iint_{\partial V} \langle \mathbf{F}_{LJ}, \mathbf{N}\rangle \, d\sigma.$$

Se come $\mathbf{N}$ prendiamo la normale uscente, allora dal Teorema della Divergenza abbiamo

$$\iint_{\partial V} \langle \mathbf{F}_{LJ}, \mathbf{N}\rangle \, d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F}_{LJ} \, dx\, dy\, dz.$$

Calcoliamo adesso la divergenza del campo di Lennard-Jones: si ha innanzitutto

$$\mathbf{F}_{LJ}(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z)),$$

dove

$$\begin{aligned}
F_1(x,y,z) &= -\frac{2\,x}{(x^2+y^2+z^2)^2} + \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\\
F_2(x,y,z) &= -\frac{2\,y}{(x^2+y^2+z^2)^2} + \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\\
F_3(x,y,z) &= -\frac{2\,z}{(x^2+y^2+z^2)^2} + \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.
\end{aligned}$$

Quindi si ottiene

$$\operatorname{div} \mathbf{F}_{LJ}(x,y,z) = \frac{2}{(x^2+y^2+z^2)^2}.$$

Usiamo adesso le coordinate sferiche

$$x = \varrho\, \cos\vartheta\, \sin\varphi, \qquad y = \varrho\, \sin\vartheta\, \sin\varphi, \qquad z = \varrho\, \cos\vartheta,$$

con $\varrho \in [1,2]$, $\vartheta \in [0, 2\,\pi]$ e $\varphi \in [0, \pi/4] \cup [3/4\,\pi, \pi]$. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}
\iint_{\partial V} \langle \mathbf{F}_{LJ}, \mathbf{N}\rangle \, d\sigma &= \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F}_{LJ} \, dx\, dy\, dz\\
&= \int_0^{2\,\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_1^2 \frac{2}{\varrho^4}\, \varrho^2\, \sin\varphi \, d\varrho\, d\varphi\, d\vartheta\\
&+ \int_0^{2\,\pi} \int_{\frac{3\,\pi}{4}}^{\pi} \int_1^2 \frac{2}{\varrho^4}\, \varrho^2\, \sin\varphi \, d\varrho\, d\varphi\, d\vartheta\\
&= 4\,\pi \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi\, d\varphi\right) \left(\int_1^2 \frac{1}{\varrho^2}\, d\varrho\right)\\
&+ 4\,\pi \left(\int_{\frac{3\,\pi}{4}}^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi\right) \left(\int_1^2 \frac{1}{\varrho^2}\, d\varrho\right)\\
&= 2\,\pi\,\sqrt{2},
\end{aligned}$$

concludendo così l'esercizio. □