Nome, Cognome ....

Matricola ....

ANALISI MATEMATICA B
– PROVA SCRITTA –

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA – A.A. 2017/2018

Libri, appunti e calcolatrici non ammessi

PRIMA PARTE

- Lo studente scriva solo la risposta, direttamente su questo foglio.

- La seconda parte verrà corretta **esclusivamente** *nel caso in cui lo studente risponda correttamente ad almeno 5 domande su 10 della prima parte.*

- Ogni esercizio vale 2 punti, in caso di risposta corretta.

Esercizio 1. *Si dica per quali valori di ϑ il campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y) = (e^x \cos\vartheta - e^y \sin\vartheta, e^x \sin\vartheta + e^y \cos\vartheta)$ è conservativo su $\mathbb{R}^2$*

$$\vartheta = k\,\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Esercizio 2. *Sia $f(x,y) = x^4 + y^4 + 4\,x\,y$. Si dica quali tra i seguenti sono punti sella per f*

$$(1,0), \qquad (0,1), \qquad (0,0), \qquad (1,-1)$$

Esercizio 3. *Si dica quale dei seguenti potenziali genera un campo vettoriale a divergenza nulla*

$$e^x \cos y \qquad \arctan\frac{y}{x} \qquad \log(x^2+y^2) \qquad x^2+y^2$$

Esercizio 4. *Sia $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 4 \le x^2+y^2 \le 9,\ y \ge 0\}$, si calcoli il suo baricentro $(\overline{x}, \overline{y})$*

$$(\overline{x}, \overline{y}) = \left(0, \frac{76}{15\,\pi}\right)$$

Esercizio 5. *Si calcoli la lunghezza ℓ della curva regolare $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$ con $t \in [0,1]$*

$$\ell = \sqrt{2}\,(e-1)$$

Esercizio 6. *Si scriva la curvatura κ_γ della curva regolare $\gamma(t) = (t, t^2)$ con $t \in [0,1]$*

$$\kappa_\gamma(t) = \frac{2}{(1+4\,t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Esercizio 7. *Si calcoli il lavoro del campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y,z) = (e^x \cos y, -e^x \sin y, 1)$ lungo la curva regolare γ il cui sostegno è l'insieme $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2 = 1,\ z = y\}$*

$$\int_{\mathrm{Im}(\gamma)} \langle \mathbf{F}, \mathbf{T}_\gamma \rangle\, d\ell = 0$$

Esercizio 8. *Siano $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \le 1\}$ e $f(x,y) = x^4 + y^4$, si determinino*

$$\max_E f = 1 \qquad\qquad \min_E f = 0$$

Esercizio 9. *Si scriva l'equazione del piano tangente al grafico di $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, nel punto $(1,1,\sqrt{2})$*

$$z = \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,(x-1) + \frac{1}{\sqrt{2}}\,(y-1)$$

Esercizio 10. *Data la direzione $\omega = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) \in \mathbb{R}^2$ e la funzione $f(x,y) = e^y \sinh x$, si calcoli*

$$\frac{\partial f}{\partial \omega}(1,-1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Seconda parte

Lo studente scriva lo svolgimento di ogni esercizio su un foglio a parte.

In questa parte **non** *verranno ritenute valide risposte corrette, ma prive di giustificazione.*

Esercizio 11 (7 punti). *Calcolare il momento di inerzia rispetto all'asse z dell'insieme*

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4,\, x \ge 0,\, y \ge 0,\, z \ge 0\}.$$

Soluzione. In base alla definizione di momento, ed osservando che per un punto (x, y, z) la sua distanza dall'asse z coincide con la quantità $\sqrt{x^2 + y^2}$, si tratta di calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_C (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz.$$

Introduciamo le coordinate sferiche usuali

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos\vartheta \sin\varphi \\ y &= \varrho \sin\vartheta \sin\varphi \\ z &= \varrho \cos\varphi, \end{aligned}$$

al fine di descrivere l'insieme C dobbiamo prendere

$$1 \le \varrho \le 2, \qquad 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}, \qquad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$$

Avremo quindi

$$\begin{aligned} \iiint_C (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \varrho^2 \sin^2\varphi\, \varrho^2 \sin\varphi\, d\varrho\, d\vartheta\, d\varphi \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\, d\varphi \right) \left(\int_1^2 \varrho^4\, d\varrho \right). \end{aligned}$$

Al fine di concludere, ci basta calcolare

$$\int_1^2 \varrho^4\, d\varrho = \left[\frac{\varrho^5}{5} \right]_1^2 = \frac{31}{5},$$

e

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\, (1 - \cos^2\varphi)\, d\varphi = \left[-\cos\varphi + \frac{\cos^3\varphi}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}.$$

In conclusione, otteniamo

$$\iiint_C (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{31}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{31}{15}\, \pi.$$

Questo termina l'esercizio. □

Esercizio 12 (9 punti). *Sia $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale dato da*

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(-\frac{y}{2}, \frac{x}{2}, z^3 \right).$$

Consideriamo i due sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 = 1,\, |z| \le \sqrt{x^2 + y^2}\},$$

e

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 \le 1,\, |z| \le \frac{1}{2} \right\}.$$

Si calcoli:

- *i flussi di $\mathbf{F}$ e di $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ attraverso ∂V;*
- *il flusso di $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ attraverso S.*

Soluzione. Occupiamoci intanto del primo punto. Osserviamo che per il flusso attraverso la superficie senza bordo ∂V, possiamo eventualmente usare il Teorema della Divergenza. Notiamo che

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) = 3\, z^2 \qquad \text{e} \qquad \operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{F}) = 0$$

quindi si ha

$$\iint_{\partial V} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N} \rangle\, d\sigma(x, y, z) = \iiint_V 3\, z^2\, dx\, dy\, dz$$

e

$$\iint_{\partial V} \langle \operatorname{rot}\mathbf{F}, \mathbf{N} \rangle\, d\sigma(x, y, z) = 0.$$

Per terminare il primo punto, dobbiamo quindi calcolare l'integrale di volume su V della funzione $3\,z^2$. Si osservi che V è la palla di centro $(0,0,0)$ e raggio 1, a cui abbiamo rimosso due calotte, tagliando ad altezza $z=1/2$ e $z=-1/2$ rispettivamente. Se introduciamo le coordinate cilindriche usuali

$$\begin{aligned} x &= \varrho\cos\vartheta\\ y &= \varrho\sin\vartheta\\ z &= z, \end{aligned}$$

allora per descrivere V dobbiamo prendere

$$z\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right],\qquad \vartheta\in[0,2\,\pi],\qquad 0\le\varrho\le\sqrt{1-z^2}.$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}\iint_{\partial V}\langle \mathbf{F},\mathbf{N}\rangle\,d\sigma(x,y,z) &= \iiint_V 3\,z^2\,dx\,dy\,dz\\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_0^{2\,\pi} 3\,z^2\left(\int_0^{\sqrt{1-z^2}}\varrho\,d\varrho\right)d\vartheta\,dz\\ &= 2\,\pi\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 3\,z^2\left[\frac{\varrho^2}{2}\right]_0^{\sqrt{1-z^2}}dz\\ &= \pi\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 3\,z^2\,(1-z^2)\,dz=\pi\left[z^3-\frac{3}{5}\,z^5\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=\frac{17}{80}\,\pi.\end{aligned}$$

Occupiamoci adesso del secondo punto, utilizzando il Teorema di Stokes abbiamo

$$\iint_S\langle \operatorname{rot}\mathbf{F},\mathbf{N}\rangle\,d\sigma(x,y,z)=\int_{\partial^+ S}\langle\mathbf{F},\mathbf{T}\rangle\,d\ell,$$

dove abbiamo preso **N uscente**. In accordo con ciò, una parametrizzazione orientata positivamente di ∂S è data dalle due circonferenze

$$\gamma_1(\vartheta)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\vartheta,\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\vartheta,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\qquad \vartheta\in[0,2\,\pi],$$

e

$$\gamma_2(\vartheta)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\vartheta,-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\vartheta,\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\qquad \vartheta\in[0,2\,\pi].$$

Si osservi che γ_1 è percorsa in senso anti-orario, mentre γ_2 è percorsa in senso orario. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}\int_{\partial^+ S}\langle\mathbf{F},\mathbf{T}\rangle\,d\ell &= \int_{\mathrm{Im}(\gamma_1)}\langle\mathbf{F},\mathbf{T}_{\gamma_1}\rangle\,d\ell+\int_{\mathrm{Im}(\gamma_2)}\langle\mathbf{F},\mathbf{T}_{\gamma_2}\rangle\,d\ell\\ &= \int_0^{2\,\pi}\left\langle\begin{bmatrix}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\sin\vartheta\\ \frac{1}{2\sqrt{2}}\cos\vartheta\\ -\frac{1}{2\sqrt{2}}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\vartheta\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\vartheta\\ 0\end{bmatrix}\right\rangle d\vartheta\\ &+\int_0^{2\,\pi}\left\langle\begin{bmatrix}\frac{1}{2\sqrt{2}}\sin\vartheta\\ \frac{1}{2\sqrt{2}}\cos\vartheta\\ \frac{1}{2\sqrt{2}}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\vartheta\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\vartheta\\ 0\end{bmatrix}\right\rangle d\vartheta\\ &= \frac{1}{4}\int_0^{2\,\pi}d\vartheta-\frac{1}{4}\int_0^{2\,\pi}d\vartheta=0,\end{aligned}$$

che conclude l'esercizio. □