Nome, Cognome ......................................................

Matricola ................................................................

**ANALISI MATEMATICA**
**– PROVA PARZIALE I SEMESTRE –**

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA – A.A. 2016/2017

`Libri, appunti e calcolatrici` **non ammessi**

PRIMA PARTE

*- Lo studente scriva solo la risposta, direttamente su questo foglio.*

*- La seconda parte verrà corretta* **esclusivamente** *nel caso che lo studente risponda correttamente ad almeno 5 domande su 10 della prima parte.*

*- Ogni esercizio vale 2 punti, in caso di risposta corretta.*

**Esercizio 1.** *Trovare i 2 punti di flesso $x_0$ e $x_1$ della funzione $x \mapsto e^{-(x-1)^2}$*

$$x_0 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad x_1 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

**Esercizio 2.** *Trovare l'insieme $\mathcal{S}$ di* **tutte** *le soluzioni $x \in \mathbb{R}$ dell'equazione $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$*

$$\mathcal{S} = \left\{x \in \mathbb{R} \,:\, x = -\tfrac{\pi}{4} + k\,\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

**Esercizio 3.** *Calcolare il limite della successione*

$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{2}{n}\right) \frac{n^2}{\sqrt[n]{n!}} = 2\,e$$

**Esercizio 4.** *Calcolare il limite seguente*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\cos x - 1} - 1}{x \, \sin(2\,x)} = -\frac{1}{4}$$

**Esercizio 5.** *Tra le serie seguenti, evidenziare quelle convergenti*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\arctan n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\sqrt{7}\right)^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,\sqrt[n]{n!}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n\,\cos(e^{-n})$$

**Esercizio 6.** *Dire per quale $\alpha > 0$ l'identità seguente risulta soddisfatta*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = 3 \qquad \alpha = \frac{2}{3}$$

**Esercizio 7.** *Trovare una primitiva $F$ della funzione $x \mapsto \arctan(x-3)$*

$$F = (x-3)\,\arctan(x-3) - \frac{1}{2}\,\log(1 + (x-3)^2)$$

**Esercizio 8.** *Usando uno sviluppo di Taylor fino all'ordine opportuno, calcolare il limite seguente*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^4) - e^{x^4} + 1}{\sin(x^4) - \dfrac{x^4}{1 - 4\,x^4}} = \frac{1}{4}$$

**Esercizio 9.** *Dare lo sviluppo di Taylor all'ordine* 2 *con resto di Peano nel punto* $x_0 = 0$ *per la funzione*

$$\frac{1}{1-x+x^2} = 1 + x + o(x^2)$$

**Esercizio 10.** *Si determini l'equazione della retta tangente al grafico della funzione* $x \mapsto \arcsin x$ *nel punto di coordinate* $(1/2, \pi/6)$

$$y = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{\pi}{6}$$

Seconda parte

*Lo studente scriva lo svolgimento di ogni esercizio su un foglio a parte.*

*In questa parte* **non** *verranno ritenute valide risposte corrette, ma prive di giustificazione.*

**Esercizio 11** (7 punti)**.** *Si studi la funzione*

$$x \mapsto e^{|x^2-3x+2|}$$

*tracciandone un grafico qualitativo quanto più possibile preciso.*

*Soluzione.* Osserviamo innanzitutto che la funzione è definita su $\mathbb{R}$ ed è ivi continua, in quanto composizione di funzioni continue. La funzione in esame è sempre strettamente positiva, in particolare non si annulla mai, perché l'esponenziale non si annulla mai.

Osservando che

$$\lim_{x\to+\infty} |x^2-3\,x+2| = \lim_{x\to-\infty} |x^2-3\,x+2| = +\infty,$$

si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} e^{|x^2-3\,x+2|} = \lim_{x\to-\infty} e^{|x^2-3\,x+2|} = +\infty.$$

Studiamo adesso gli intervall di monotonia della funzione. Cominciamo con l'osservare che

$$x^2-3\,x+2 = (x-2)\,(x-1),$$

e che la funzione in esame non sarà derivabile ogni volta che $x^2-3\,x+2$ si annulla, a causa della presenza del valore assoluto che non è derivabile quando l'argomento si annulla. Si ha

$$x^2-3\,x+2 \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \geq 2 \text{ oppure } x \leq 1.$$

Si ha quindi

$$e^{|x^2-3\,x+2|} = \begin{cases} e^{x^2-3\,x+2}, & \text{se } x \in (-\infty,1]\cup[2,+\infty] \\ e^{-x^2+3\,x-2}, & \text{se } x \in (1,2), \end{cases}$$

e tale funzione risulta derivabile in $\mathbb{R}\setminus\{1,2\}$. Calcoliamo tale derivata e studiamone il segno, distinguendo due casi:

- se $x<1$ oppure $x>2$, allora
$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}e^{|x^2-3\,x+2|} &= \frac{d}{dx}e^{x^2-3\,x+2}\\ &= e^{x^2-3\,x+2}\,(2\,x-3) \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \geq \frac{3}{2}\end{aligned}$$
quindi, ricordando la restrizione iniziale su $x$, abbiamo che
$$\text{per } x<1 \text{ la funzione è strettamente decrescente}$$
$$\text{per } x>2 \text{ la funzione è strettamente crescente}$$
- se $1<x<2$, allora stavolta si ha
$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}e^{|x^2-3\,x+2|} &= \frac{d}{dx}e^{-x^2+3\,x-2}\\ &= e^{-x^2+3\,x-2}\,(3-2\,x) \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \leq \frac{3}{2},\end{aligned}$$
ovvero, ricordando che siamo nell'ipotesi $1<x<2$, si ha
$$\text{per } 1<x\leq\frac{3}{2} \text{ la funzione è strettamente crescente}$$
$$\text{per } x>\frac{3}{2} \text{ la funzione è strettamente decrescente .}$$

Si ha in particolare che $x = 3/2$ è un punto a tangente orizzonate che è punto di massimo locale (non può essere globale, perché sappiamo che la funzione è illimitata superiormente). Inoltre i punti $x = 1$ e $x = 2$ sono punti di minimo globale, ovvero

$$e^{|x^2-3\,x+2|} \geq e^0 = 1, \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Si osservi che i due punti di minimo globale sono esattamente in corrispondenza dei punti di non differenziabilità della funzione. Tali punti sono *punti angolosi* della funzione, infatti

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{d}{dx} e^{|x^2-3\,x+2|} = \lim_{x\to 1^+} e^{x^2-3\,x+2}\,(2\,x-3) = -1$$

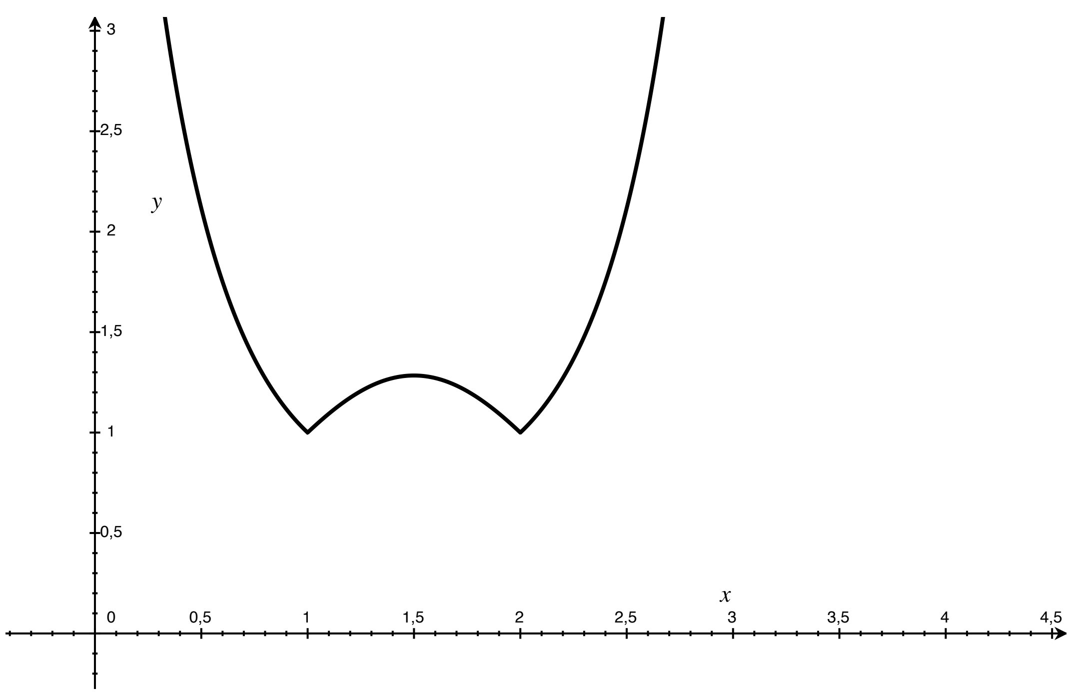
mentre

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{d}{dx} e^{|x^2-3\,x+2|} = \lim_{x\to 1^+} e^{-x^2+3\,x-2}\,(3\,x-2) = 1.$$

Similmente si trova per $x = 2$.

Infine, studiamo gli intervalli di convessità/concavità della funzione:

- se $x < 1$ oppure $x > 2$, allora
$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2} e^{|x^2-3\,x+2|} &= \frac{d^2}{dx^2} e^{x^2-3\,x+2}\\ &= e^{x^2-3\,x+2}\,((2\,x-3)^2+2) \geq 0\end{aligned}$$
quindi la funzione è convessa per $x < 1$ e $x > 2$;
- se $1 < x < 2$, allora
$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2} e^{|x^2-3\,x+2|} &= \frac{d^2}{dx^2} e^{-x^2+3\,x-2}\\ &= e^{-x^2+3\,x-2}\,(7-12\,x+4\,x^2) \geq 0 \quad \iff \quad x \leq \frac{3-\sqrt{2}}{2} \text{ o } x \geq \frac{3+\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$
quindi la funzione è concava per $1 < x < 2$, dato che
$$\frac{3-\sqrt{2}}{2} < 1 < x < 2 < \frac{3+\sqrt{2}}{2}.$$
Sotto si trova il grafico della funzione.




□

**Esercizio 12** (7 punti). *Si calcoli l'integrale seguente*

$$\int_{-3}^{3} (9 - x^2)^{\frac{3}{2}}\, dx$$

*Soluzione.* Si introduca il cambio di variabile

$$x = 3\,\cos t, \qquad \text{per } t \in [0, \pi],$$

si ottiene quindi

$$\begin{aligned}
\int_{-3}^{3} (9 - x^2)^{\frac{3}{2}}\, dx &= 81 \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}\, \sin t\, dt \\
&= 81 \int_0^{\pi} \sin^4 t\, dt = 81 \int_0^{\pi} \left(\sin^2 t\right)^2 dt \\
&= 81 \int_0^{\pi} \left(\frac{1 - \cos 2\,t}{2}\right)^2 dt \\
&= 81 \int_0^{\pi} \frac{1 - 2\,\cos 2\,t + \cos^2 2\,t}{4}\, dt \\
&= 81\,\frac{\pi}{4} + \frac{81}{4} \int_0^{\pi} \cos^2 2\,t\, dt \\
&= 81\,\frac{\pi}{4} + \frac{81}{4} \int_0^{\pi} \frac{1 + \cos 4\,t}{2}\, dt \\
&= \frac{81\,\pi}{4} + \frac{81\,\pi}{8}.
\end{aligned}$$

□