ANALISI MATEMATICA
– PROVA PARZIALE I SEMESTRE –

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA – A.A. 2016/2017

`Libri, appunti e calcolatrici` **non ammessi**

PRIMA PARTE

- Lo studente scriva solo la risposta direttamente su questo foglio.

- La seconda parte verrà corretta **esclusivamente** *nel caso che lo studente risponda correttamente ad almeno 5 domande su 10 della prima parte.*

- Ogni esercizio vale 2 punti, in caso di risposta corretta.

Esercizio 1. *Trovare l'insieme $\mathcal{S}$ di* **tutte** *le soluzioni $x \in \mathbb{R}$ dell'equazione* $\cos x = \sin(2\,x)$

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{2} + k\,\pi \,:\, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{6} + 2\,k\,\pi \,:\, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5}{6}\,\pi + 2\,k\,\pi \,:\, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Esercizio 2. *Calcolare il limite della successione*

$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(e^{-\sqrt{n}}\right) \frac{n^2\, e^{\sqrt{n}}}{\sqrt{n!}} = 0$$

Esercizio 3. *Si determini l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $x \mapsto \arctan(x^3 - x)$ nel punto di coordinate $(-1, 0)$*

$$y = 2\,x + 2$$

Esercizio 4. *Calcolare il limite seguente*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x^3 - 1}{\sin(2\,x^6)} = -\frac{1}{4}$$

Esercizio 5. *Tra le serie seguenti, evidenziare quelle convergenti*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}\right) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \left(\frac{999}{1000}\right)^{2\,n} \qquad \sum_{n=20}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log\log\log n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n\,\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Esercizio 6. *Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la seguente serie a termini positivi è convergente*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,\alpha^{2\,n} \qquad \textit{per } |\alpha| < 1$$

Esercizio 7. *Trovare una primitiva F su $(-3, +\infty)$ della funzione $x \mapsto \log(3 + x)$*

$$F = (x+3)\,\log(x+3) - x$$

Esercizio 8. *Usando uno sviluppo di Taylor fino all'ordine opportuno, calcolare il limite seguente*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{1-x^4} - \sin(x^4) + 1 - 2\,e^{x^8}}{\sqrt{1+x^8} - 1} = -2$$

Esercizio 9. *Dare lo sviluppo di Taylor all'ordine 2 con resto di Peano nel punto $x_0 = 0$ per la funzione*

$$\log(1 - x^2 - x) = -x - \frac{3}{2}\,x^2 + o(x^2)$$

Esercizio 10. *Trovare i 2 punti di flesso x_0 e x_1 della funzione $x \mapsto \log(1 + 4\,x^2)$*

$$x_0 = -\frac{1}{2} \qquad x_1 = \frac{1}{2}$$

Seconda parte

Lo studente scriva lo svolgimento di ogni esercizio su un foglio a parte.

In questa parte non verranno ritenute valide risposte corrette, ma prive di giustificazione.

Esercizio 11 (7 punti)**.** *Si studi la funzione integrale*

$$x \mapsto \int_0^x e^{\arctan|t|}\, dt$$

tracciandone un grafico qualitativo quanto più possibile preciso. Si discuta in particolare se la funzione ha asintoti obliqui (domanda bonus, 2 punti aggiuntivi).

Soluzione. La funzione $t \mapsto e^{\arctan|t|}$ è definita e continua su tutto $\mathbb{R}$, quindi la funzione integrale esiste per ogni $x \in \mathbb{R}$. Osserviamo inoltre che la funzione integranda è pari, quindi

$$F(x) = \int_0^x e^{\arctan|t|}\, dt,$$

è dispari. Infatti, per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$F(-x) = \int_0^{-x} e^{\arctan|t|}\, d \stackrel{t=-s}{=} -\int_0^x e^{\arctan|s|}\, ds = -F(x).$$

Osserviamo anche che essendo l'integrando positivo, si ha

$$F(x) \geq 0, \qquad \text{per ogni } x \geq 0.$$

Occupiamoci adesso di calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{\arctan|t|}\, dt.$$

Osserviamo che per $t \geq 0$, la funzione $t \mapsto e^{\arctan|t|}$ è monotona crescente. Si ha quindi

$$e^{\arctan|t|} \geq e^{\arctan 1} = e^{\frac{\pi}{4}}, \qquad \text{per } t \geq 1.$$

La funzione positiva e costante $t \mapsto e^{\pi/4}$ non è integrabile per $t \geq 1$, per il criterio del confronto si ha quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{\arctan|t|}\, dt \geq \lim_{x\to+\infty} \int_1^x e^{\arctan|t|}\, dt \geq \lim_{x\to+\infty} \int_1^x e^{\frac{\pi}{4}}\, dt = +\infty,$$

quindi F diverge all'infinito[1]. Studiamo gli intervalli di monotonia adesso: per definizione, si ha

$$F'(x) = e^{\arctan|x|}, \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

L'ultima funzione è strettamente positiva, quindi otteniamo che F è strettamente crescente. Infine, osserviamo che F' è a sua volta derivabile su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e (si ricordi che F è dispari, quindi basta studiare il segno di F'' per $x > 0$)

$$F''(x) = e^{\arctan x}\, \frac{1}{1+x^2} > 0, \qquad \text{per ogni } x > 0.$$

Quindi F è convessa per $x > 0$ e concava per $x < 0$. □

[1] *Discussione da 2 punti bonus.* Più precisamente, la funzione ha crescita lineare all'infinito, infatti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} \stackrel{\text{Hôpital}}{=} \lim_{x\to+\infty} F'(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{\arctan|x|} = e^{\frac{\pi}{2}}.$$

Tuttavia, la funzione F non ha un asintoto obliquo all'infinito. Infatti, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \left[F(x) - e^{\frac{\pi}{2}}\, x\right] = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \left[e^{\arctan t} - e^{\frac{\pi}{2}}\right] dt = e^{\frac{\pi}{2}} \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \left[e^{\arctan t - \frac{\pi}{2}} - 1\right] dt.$$

Per discutere la convergenza dell'ultimo integrale, si osservi che la funzione da integrare ha segno costante e risulta

$$\arctan t - \frac{\pi}{2} = -\arctan \frac{1}{t},$$

da cui

$$e^{\arctan t - \frac{\pi}{2}} - 1 = e^{-\arctan \frac{1}{t}} - 1 \sim -\arctan \frac{1}{t} \sim -\frac{1}{t}, \qquad \text{per } t \to +\infty.$$

L'ultima funzione non è integrabile su $[1+\infty)$, quindi dal criterio del confronto asintotico per l'integrale improprio di funzioni a segno costante, si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} \left[F(x) - e^{\frac{\pi}{2}}\, x\right] = -\infty$$

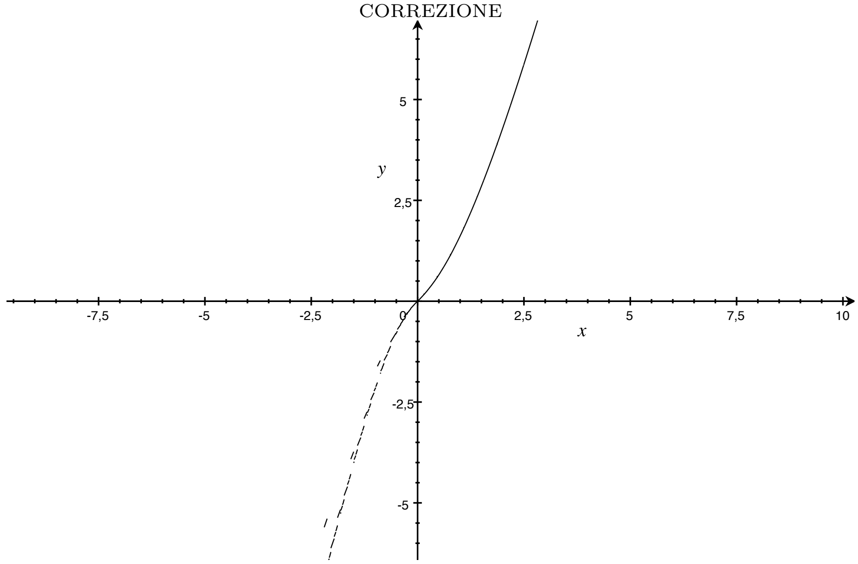

FIGURE 1. Il grafico della funzione integrale dell'Esercizio 11.

Esercizio 12 (7 punti). *Si discuta il dominio di definizione e si calcoli una primitiva della seguente funzione razionale*

$$x \mapsto \frac{x+1}{x^3+x^2+x}$$

Soluzione. Si osservi che

$$x^3+x^2+x = x\,(x^2+x+1),$$

ed il polinomio x^2+x+1 non ha radici reali. Il dominio di definizione della funzione è quindi $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Facciamo adesso la decomposizione in fratti semplici

$$\frac{x+1}{x^3+x^2+x} = \frac{A}{x} + \frac{B\,x+C}{x^2+x+1}.$$

Si vede facilmente che si ha

$$A=1, \qquad B=-1, \qquad C=0.$$

Quindi

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{x^3+x^2+x}\,dx &= \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{x}{x^3+x^2+x}\,dx \\ &= \log|x| - \frac{1}{2}\int \frac{2\,x+1}{x^2+x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx \\ &= \log|x| - \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\,x+1}{\sqrt{3}}\right) + c,\end{aligned}$$

per $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. $\square$